



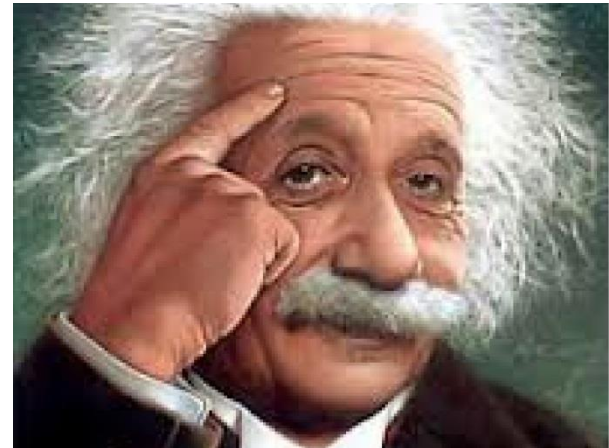
**Numerikus szimulációk alkalmazása
az energiaiparban**

**ENERGETIKAI SZAKKOLÉGIUM
2015. február 19.**

Molnár Szabolcs

***„Tanulj a tegnaptól, élj a mánap és reménykedj a holnapban.
A legfontosabb azonban, hogy ne hagyd abba a kérdezést.”***

(Albert Einstein)



Előadásom tartalma

- I. A PÖYRY vállalat csoporról
- II. A numerikus szimuláció elméleti megközelítése
- III. A Navier-Stokes egyenlet megoldása
- IV. Gyakorlati alkalmazások
- V. Kérdések

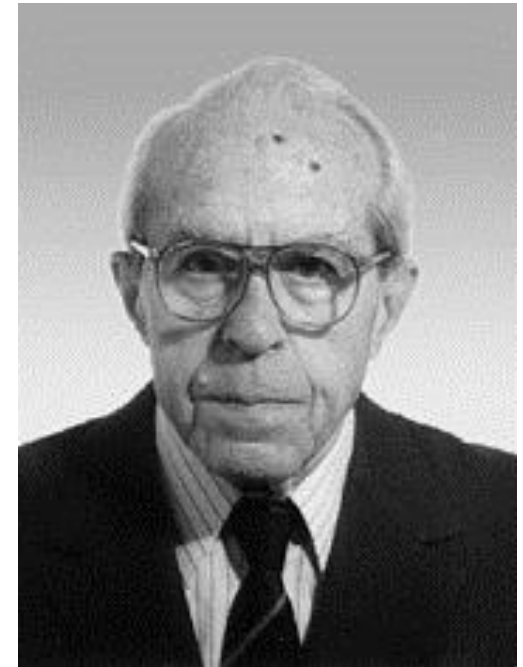
A PÖYRY CSOPORT

- A PÖYRY csoport egy tanácsadói és mérnökszolgáltatásokra specializálódott vállalat
- 1958-ban alapította Jaakko Pöyry
- Évente kb. 15000 projekten dolgozunk
- Hozzávetőleg 6500 munkatársunk van
- Több, mint 50 országban vagyunk jelen
- A központunk Vantaa-ban Finnországban található
- A vállalatcsoport négy üzleti egységre oszlik:
 - Energetikai
 - Ipari
 - Építőipari
 - Tanácsadói tevékenység



A MAGYAR LEÁNYVÁLLALAT – ERŐTERV ZRt.

- 1950-ben alapította Dr. Lévai András
- Cégünk számos hazai meghatározó energetikai projekt résztvevője volt
- Jelenlegi és volt munkatársaink között számos neves hazai szakember található
- A cégünknel dolgozott pl. Dr. Csom Gyula, Dr. Bánhidi László, Dr. Stóbl Alajos is
- Vállalatunk munkatársai 70%-ban felsőfokú végzettségűek, nagy részünk több diplomával ill. tudományos fokozattal rendelkezik
- Tervezési tevékenység mellett, nagyszámú ipari kutatási és tudományos tevékenységű projektet végez



Főbb munkáink és megrendelőink

- 1958-1962 KFKI AEKI tervezője
- 1975-2009 között a Paksi Atomerőmű generáltervezője
- 1975 BME NTI gépész, villamos, irányítástechnikai és építész tervek
- Főbb partnereink:

ALSTOM



paksi atomerőmű

SIEMENS



MÁTRAI ERŐMŰ
RSZVÉNYTÁRSASÁG

e-on

RWE



Tractebel Engineering
GDF SUEZ



Energetikai matematikai modellek

- Az energiafelhasználás kiemelkedően magas
- Globális hatásai
- Cél – KELL, hogy legyen – fenntartható jövő miatt, az energia felhasználásának a csökkentése
- Hogyan lehet elérni?
- Kiemelkedik az energiatudatos tervezés szerepe



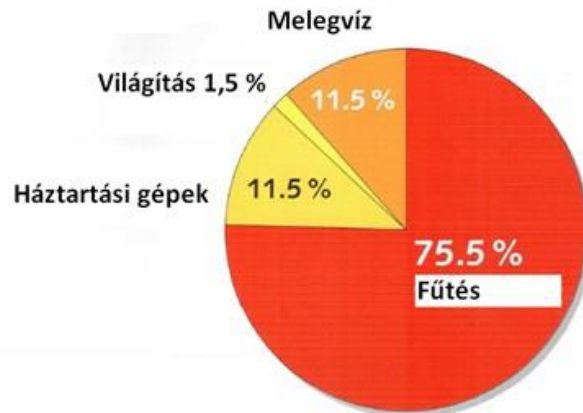
Az épületenergetikai tudatos tervezés fontossága

- Ökológiai lábnyom
- Nemzetgazdasági kérdések



Energetika – nemzeti gazdálkodás-aktuális kérdés(ek)

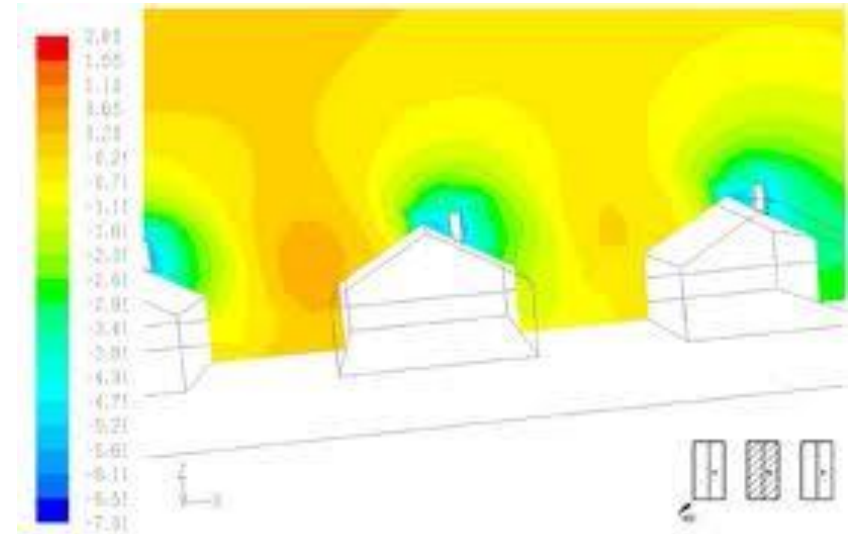
- 9 osztályos általános iskola
- Energetikai kérdések felvetése



- Rövid levezetés:
- 1 általános iskolai tanév ~180 tanítási nap
- A +1 év, tehát 180 napot jelentene
- Ha ezt elosztjuk a jelenlegi 8 iskolai évre: $\frac{180 \text{ nap}}{8 \text{ év}} = 22,5 \frac{\text{nap}}{\text{év}}$
- Tehát évente 4,5 héttel kellene többet járni
- Nyári szünetből lefaragni, mely jelenleg ~10 hét! Csak 6 lenne.
- És nem kellene egy plusz év, amivel energiát lehetne spórolni, mert az helyiségeket (osztálytermek, szaktantermek, tornaterem stb.) energiával kell ellátni.

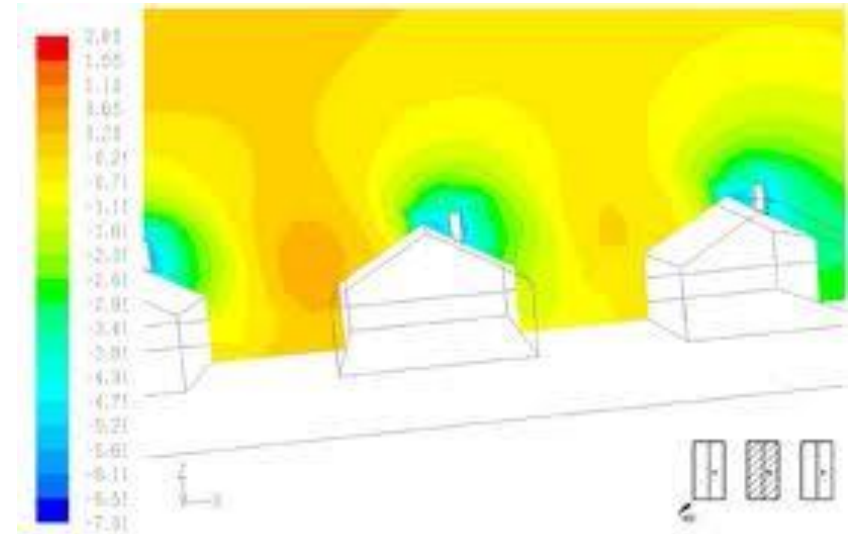
A numerikus szimulációkról

- Az áramlások numerikus szimulációja, számítása nagyon gyors fejlődésnek indult
- Most már ott „tartunk”, hogy a hő- és áramlástan alapegyenleteinek: a tömeg-, az impulzus- és az energia-megmaradást leíró, valamint a, mozgás- és energiaegyenleteket, a kontinuitást valamint egyéb mennyiségek (pl. turbulencia), transzportegyenleteinek numerikus megoldására épülő szoftvereket az ipari gyakorlatban lehet alkalmazni



A numerikus szimulációkról – Miért jó alkalmazni?

- A valóságot leíró 3D-s, időben állandó és változó, valamint a lamináris és turbulens áramlások számítása
- Az összenyomhatóság figyelembe vételének lehetősége
- A hő három terjedési lehetőségének leírása: hőátadás, hővezetés, sugárzás számítása
- Égés, kémiai reakciók egyidejű meghatározása
- Kétfázisú közegek (porszemcsék áramló közegekben – légtechnika, gázbuborékok folyadékokban) leírása
- Kavitáció számítása, áramlásoknál is
- Áramlás számítása ellenállásokon keresztül (szűrőkben, membránoknál)
- Mozgó, deformálódó térfogatok hálózása



A VALÓSÁG MINÉL PONTOSABB KÖZELÍTÉSE

A numerikus szimulációról – Előnyei

- Gyorsabb olcsóbb, mint akár egy helyszíni mérés, vagy egy modell kísérlet (szélcsatorna)
- A mérési pontok helyett, pontos és teljes eloszlás ismeret
- Több próba variáció vizsgálatának lehetősége
- Tihanyi visszhang kérdése



Navier- Stokes egyenletek

- Alapja: az áramló folyadékokban fellépő feszültség két összetevőből áll.
- Egy a folyékony anyag sebesség-gradiensével arányos diffúziós (a viszkozitást jellemző) összetevőből
- És egy nyomás összetevőből áll

- Alapja: az áramló folyadékokban fellépő feszültség két összetevőből áll.
- Egy a folyékony anyag sebesség-gradiensével arányos diffúziós (a viszkozitást jellemző) összetevőből
- És egy nyomás összetevőből áll

Peter Bradshaw (1994):

„Turbulence is the invention of the 7th day of creation”



Claude Navier



George Gabriel
Stokes

A Navier-Stokes egyenlet felírása

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}_T}{\partial t} + \mathbf{v}_T \cdot \nabla \mathbf{v}_T \right) = \mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T}$$

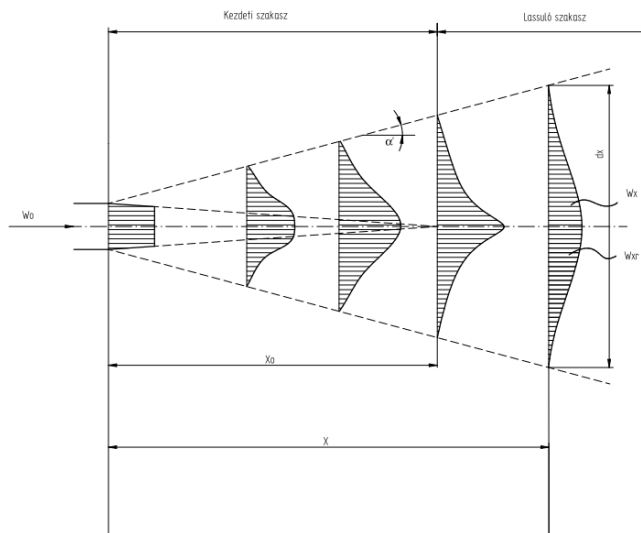
- Az egyenlet egy mozgó, áramló folyadék végtelen kicsi részét analizálja Newton második törvénye, vagyis az impulzus megmaradás törvénye alapján
- Az egyenlet bal oldala gyorsulást
- A jobb oldala a testre ható erők és feszültség-változását fejezi ki
- $\mathbf{v}$ folyadék sebesség
- ρ folyadék sűrűség
- $\mathbf{T}$ a feszültség tenzor
- $\mathbf{f}$ a folyadék egységnyi köbtartalmára ható erő
- ∇ a nabla operátor

Konvektív gyorsulás

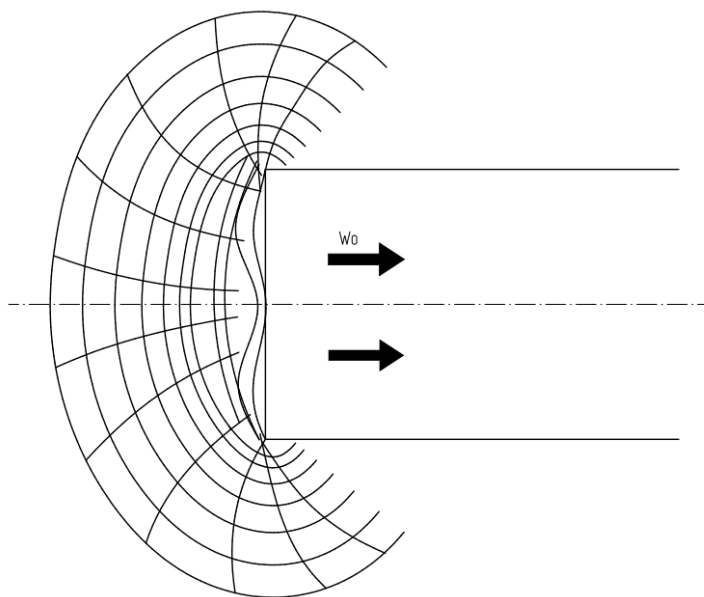
- Egy fecskendőben a folyadék áramlása
- A folyadéknak térbeli, időtől független sebességváltozásaként értelmezhetjük
- „Valamitől” való függetlenség



A „függetlenség”



(el)fúvás

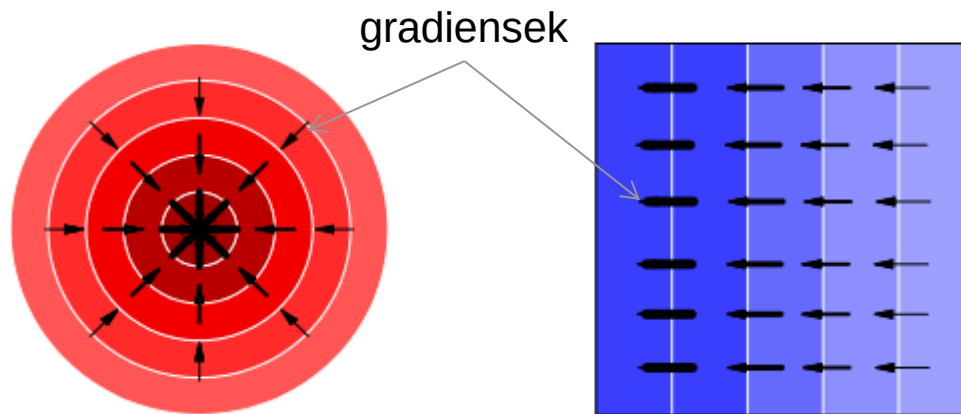


(el)szívás

A sebesség vektor tenzor deriváltja

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}_T}{\partial t} + \mathbf{v}_T \cdot \nabla \mathbf{v}_T \right) = \mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T}$$

$\nabla \mathbf{v}$ a sebesség vektor tenzor deriváltja, ami Descartes-féle koordináta rendszerben nem más, mint a komponensekként vett gradiens. A gradiens a függvények deriválásának általánosítása többváltozós függvényekre, melynek eredménye egy vektormező, mely megmutatja, hogy változik a függvény, és megadja a skalármező megváltozásának irányát is



Feszültség

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}_T}{\partial t} + \mathbf{v}_T \cdot \nabla \mathbf{v}_T \right) = \mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T}$$

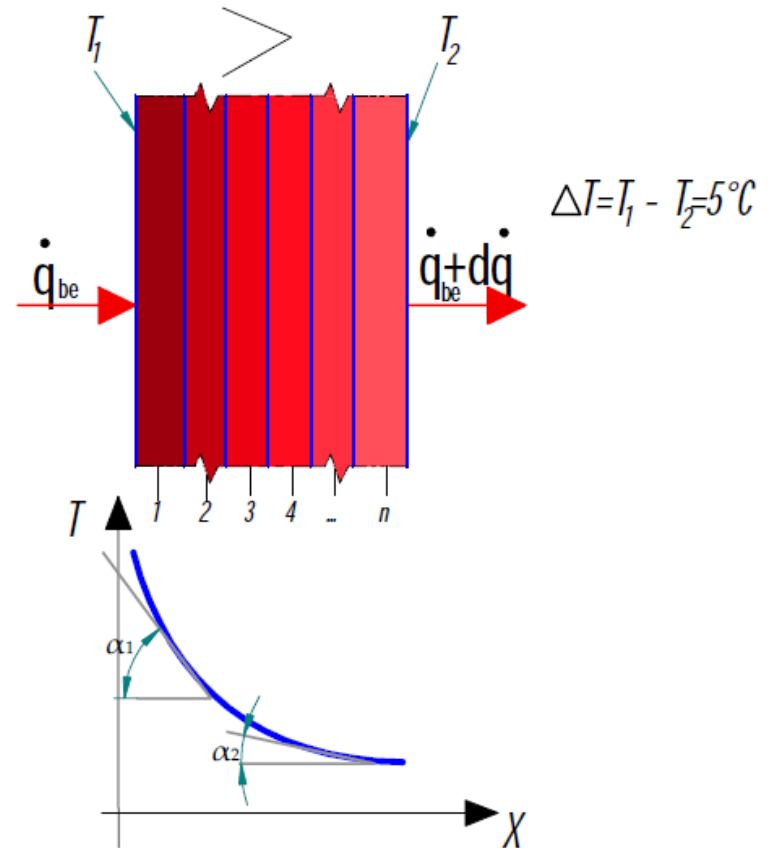
- A folyadék feszültség hatását a szilárd anyagokban a feszültség-tenzor iránytól nem függő részéből származó nyomás gradiensnek nevezett tenzor komponens a feszültség megfelelője, az azzal analóg ∇p és $\nabla \cdot \mathbf{T}$ felületi erő-gradiens összefüggések írják le
- $\nabla \cdot \mathbf{T}$ erő-hatás, ami a viszkózus, a folyadék viszkozitás hatásából származó ellenálló erőket képviseli
- A feszültség tenzor felépül egy 3x3-as azonossági mátrixból:

$$\dots \begin{bmatrix} g'^2 & \dots & \dots \\ \dots & c'^2 & \dots \\ \dots & \dots & h'^2 \end{bmatrix} \dots = \dots \begin{bmatrix} g_{xx} & g_{xy} & g_{xz} \\ g_{yx} & g_{yy} & g_{yz} \\ g_{zx} & g_{zy} & g_{zz} \end{bmatrix} \dots = \dots \begin{bmatrix} g & \dots & \dots \\ \dots & c'^2 & \dots \\ \dots & \dots & h'^2 \end{bmatrix} \dots = \dots \begin{bmatrix} \sigma_x & \dots & \dots \\ \dots & \sigma_y & \dots \\ \dots & \dots & \sigma_z \end{bmatrix} \dots$$

normálfeszültségi
komponensek

Potenciál különbség

- Megjegyezendő, hogy csak a nyomás gradiensnek van hatása, magának a nyomásnak nincs: a folyadék áramlás a nyomás csökkenés következménye, így annak irányát követi
- Analóg a hőáramlással is:
- A potenciál különbség a hőmérséklet különbség, mely a hőáramlás hajtóerejét fogja biztosítani



Reynolds egyenlet koordináta egyenletei:

- x, y, z irányokra felírva:

x, y, z

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_x}{\partial z} = f_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \cdot \Delta v_x - \frac{\partial}{\partial x} (\overline{g'^2}) - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{g' \cdot c'}) - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{g' \cdot h'})$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_y}{\partial z} = f_y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \cdot \Delta v_y - \frac{\partial}{\partial x} (\overline{c' \cdot g'}) - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{c'^2}) - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{c' \cdot h'})$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} = f_z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \cdot \Delta v_z - \frac{\partial}{\partial x} (\overline{h' \cdot g'}) - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{c' \cdot h'}) - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{h'^2})$$

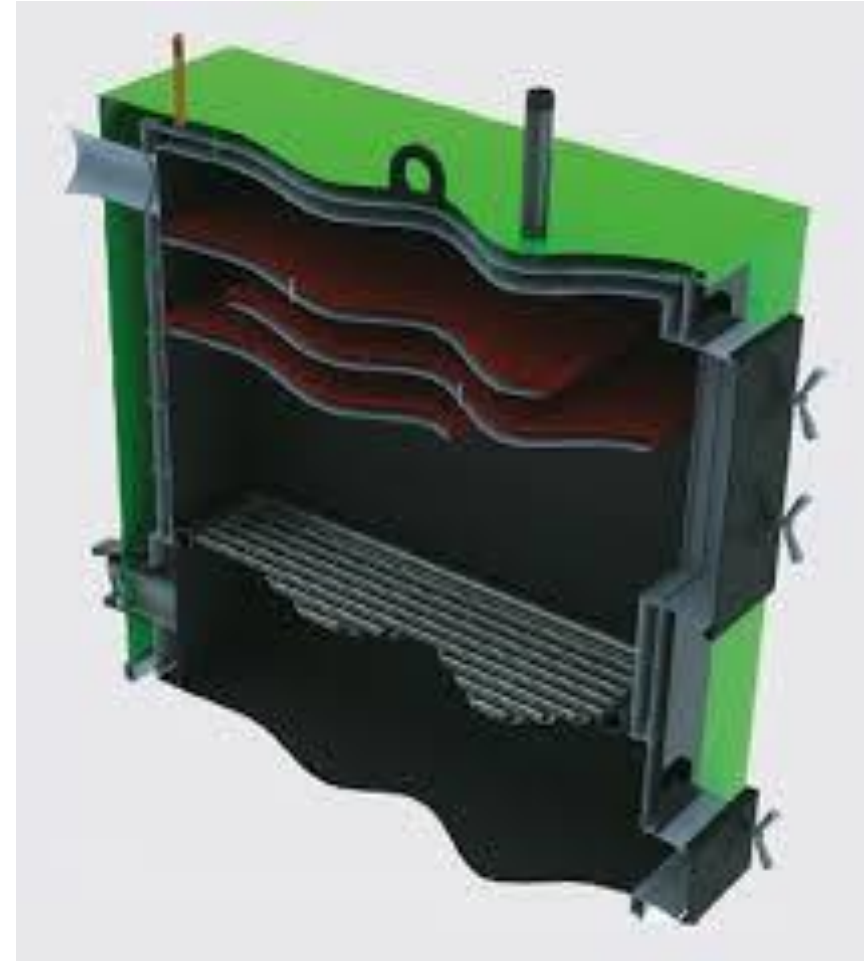
$$\begin{bmatrix} \overline{g'^2} & \overline{g' \cdot c'} & \overline{g' \cdot h'} \\ \dots & \overline{c' \cdot g'} & \overline{c'^2} & \overline{c' \cdot h'} \\ \overline{h' \cdot g'} & \overline{h' \cdot c'} & \overline{h'^2} \end{bmatrix} = \dots \begin{bmatrix} g_{xx} & g_{xy} & g_{xz} \\ g_{yx} & g_{yy} & g_{yz} \\ g_{zx} & g_{zy} & g_{zz} \end{bmatrix} = \dots \begin{bmatrix} \overline{g'^2} & \dots & \dots \\ \dots & \overline{c'^2} & \dots \\ \dots & \dots & \overline{h'^2} \end{bmatrix} = \dots \begin{bmatrix} \sigma_x & \dots & \dots \\ \dots & \sigma_y & \dots \\ \dots & \dots & \sigma_z \end{bmatrix} \dots$$

Numerikus szimuláció szoftveres megoldása

- A Reynolds-egyenlet koordináta egyenleteivel és a kontinuitási egyenletekkel összesen 4 egyenletünk van
- Az ehhez tartozó ismeretlenek száma meghaladja a 4-et, vagyis az ismeretlenek száma több mint ahány egyenletünk van
- Az ismeretlenek: a feszültségtenzorok független elemei (6db), a nyomás (p), az átlagsebesség (v) 3 komponense stb.
- Az egyenletek így módon nem megoldhatóak
- Turbulencia modellt vagy numerikus szimulációt kell alkalmazni, mint például a DNS – Direkt Numerikus Szimuláció, vagy a Nagy Örvények Szimulációja (LES)

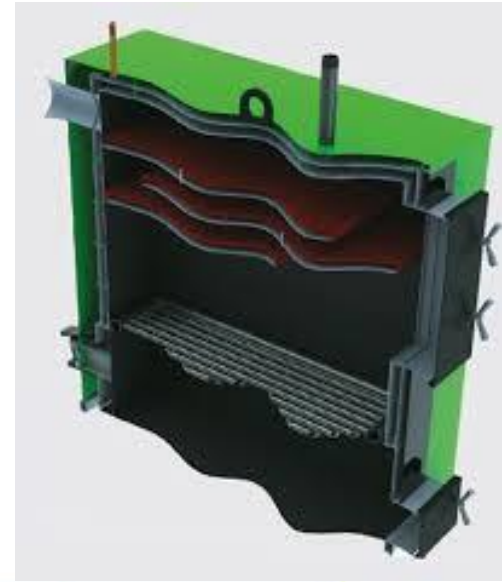
Levegő fizikai modell

- A levegő (és oxigéntartalma), biztosítása a helyiségekben kiemelt fontosságú
- Több célt is meg lehet valósítani a légtechnikai rendszerekkel
- Élethez szükséges oxigén biztosítása
- Esetleges fűtés – pl. múzeumok, mozi
- Vagy hűtés biztosítása
- Gyakori eszköze a kalorifer: keresztáramú hőcserélő



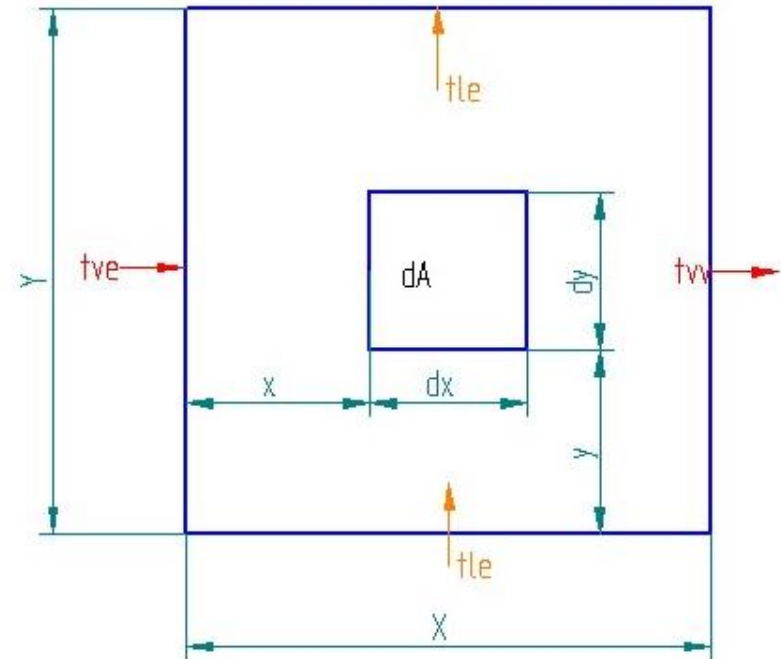
Fontos a pontos ismeret

- Célkitűzés: A levegő és a hőhordozó közeg (víz) hőmérsékletének pontos követése



- Kiválasztottam a hőcserélő lap egyik elemét
- Melynek nagysága $dA=dx*dy$
- A dA elemi felületen kicserélt energiaáram nagysága:

$$d\dot{Q} = k \cdot dA \cdot \Delta t = k \cdot dA \cdot (t_v - t_l)$$



A levegő és víz hőmérsékletének követése

- A hőtechnikai levezetések elhagyva, csak az eredményt közlöm:

- A hőmérséklet különbség kifejezhető:

a) A fűtőközeg adataival:

$$t_{\text{levegő}} - t_{\text{víz}} = \frac{\dot{W}_{\text{víz}}}{k \cdot Y} \cdot \frac{\partial t_{\text{víz}}}{\partial x}$$

b) A levegő adataival:

$$t_{\text{víz}} - t_{\text{levegő}} = \frac{\dot{W}_{\text{levegő}}}{k \cdot X} \cdot \frac{\partial t_{\text{levegő}}}{\partial y}$$

Bevezetve az alábbi két jelölést:

$$\xi = \frac{k \cdot Y}{\dot{W}_{\text{víz}}} \cdot x$$

$$\eta = \frac{k \cdot X}{\dot{W}_{\text{levegő}}} \cdot y$$

A hőcserét leíró két differenciál egyenlet

- A víz (fűtőközeg) adataival:

$$\frac{\partial t_{\text{víz}}}{\partial \xi} = t_{\text{levegő}} - t_{\text{víz}}$$

- A felmelegített levegő adataival:

$$\frac{\partial t_{\text{levegő}}}{\partial \eta} = t_{\text{víz}} - t_{\text{levegő}}$$

- Az egyenletek megoldásai Nusselt-től származnak
- A teljes megoldást mellőzöm, csak az egyszerűsített végeredményt mutatom be



Megoldások

- A fűtővíz $t_{v\acute{z}}$ hőmérsékletét az alábbi összefüggés adja meg:

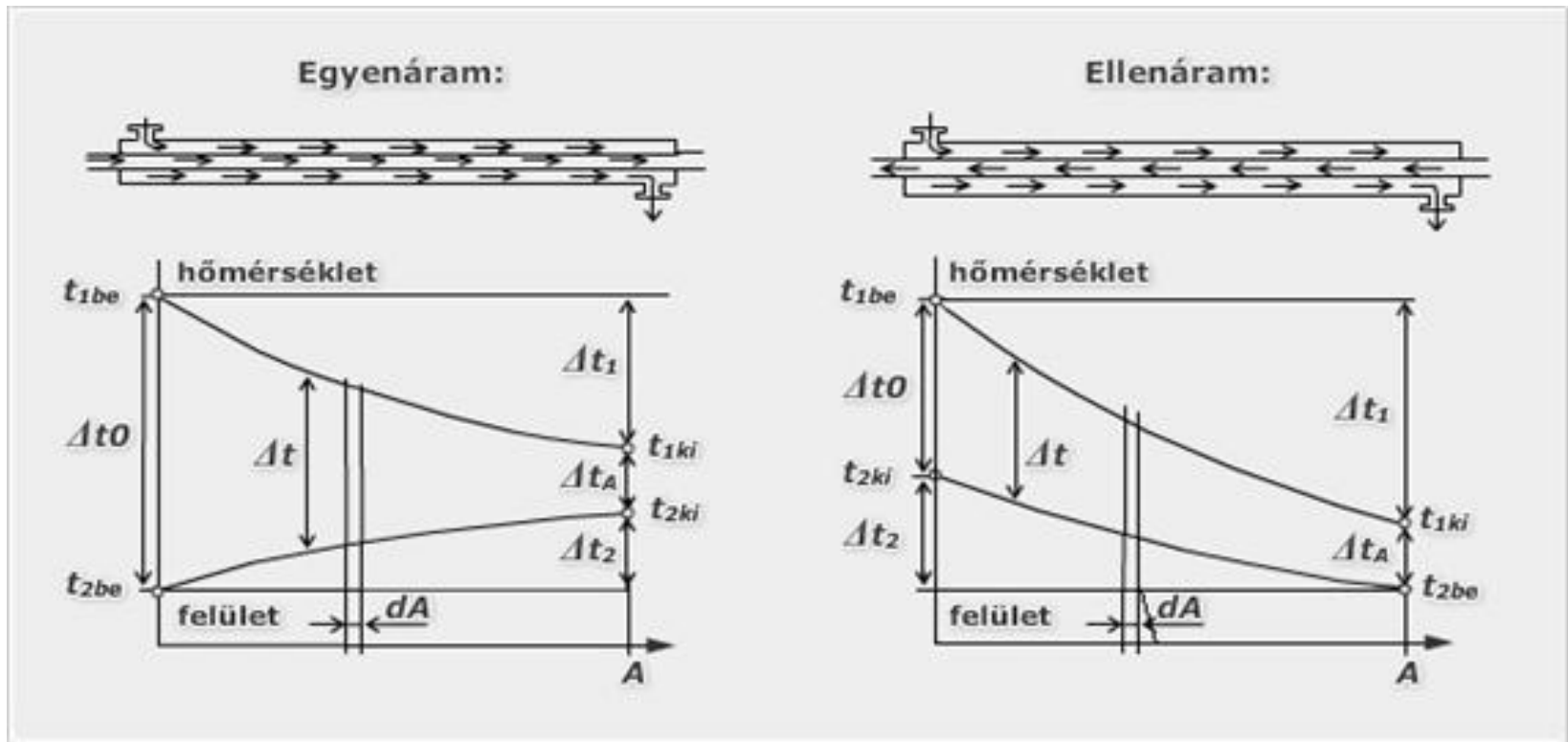
$$\frac{t_{v\acute{v}ssza} - t_{lel\ddot{o}}}{t_{vel\ddot{o}} - t_{lel\ddot{o}}} = 1 - e^{-(\xi + \eta)} \left[\xi + \frac{\xi^2}{2!} (1 + \eta) + \dots \right]$$

- A mindenkori levegő hőmérsékletét $t_{leveg\ddot{o}}$ a következő kifejezésből fejezhető ki:

$$\frac{t_{lv\acute{v}ssza} - t_{lel\ddot{o}}}{t_{vel\ddot{o}} - t_{lel\ddot{o}}} = 1 - e^{-(\xi + \eta)} [1 + \xi(1 + \eta) + \dots]$$

A „klasszikus” eset

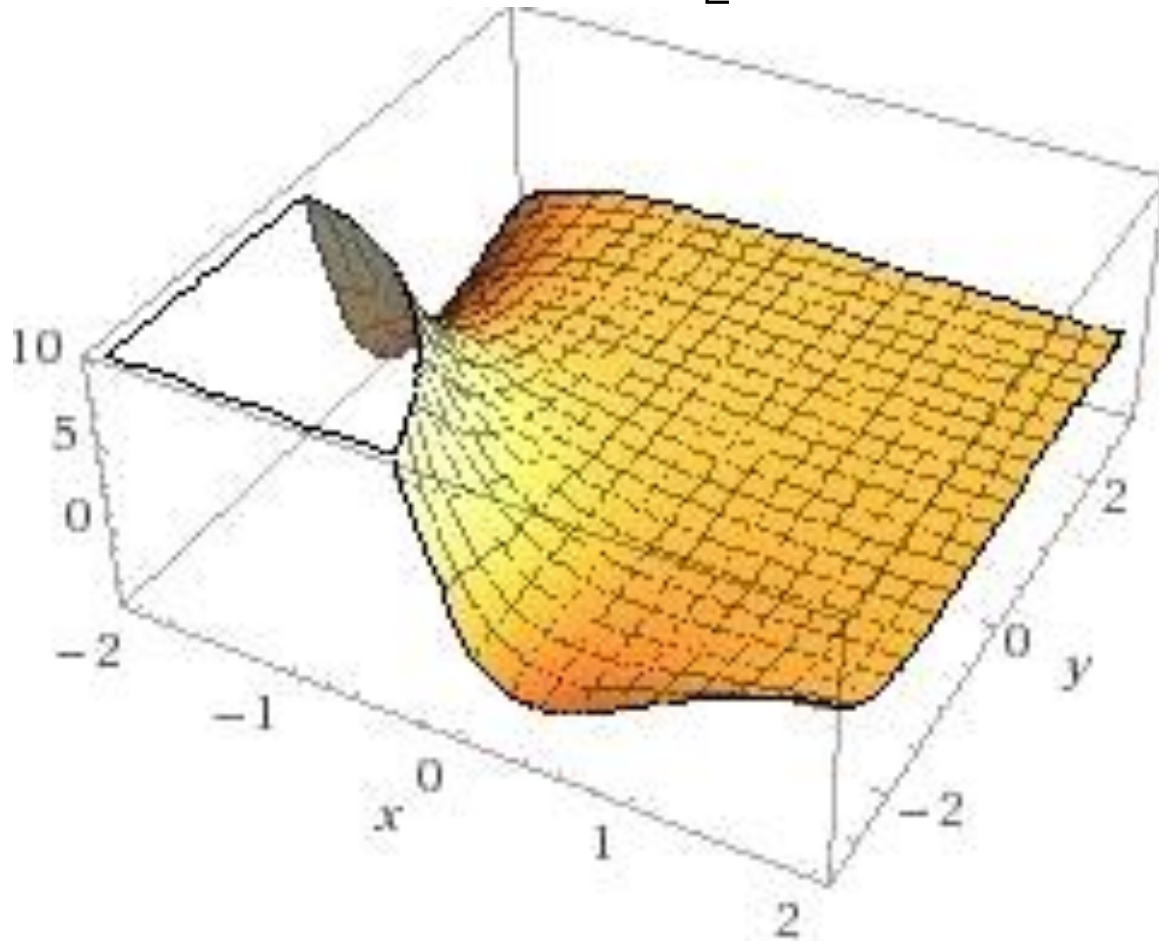
egyenáram – ellenáram 2D-s esetben



A térbeli leírás?

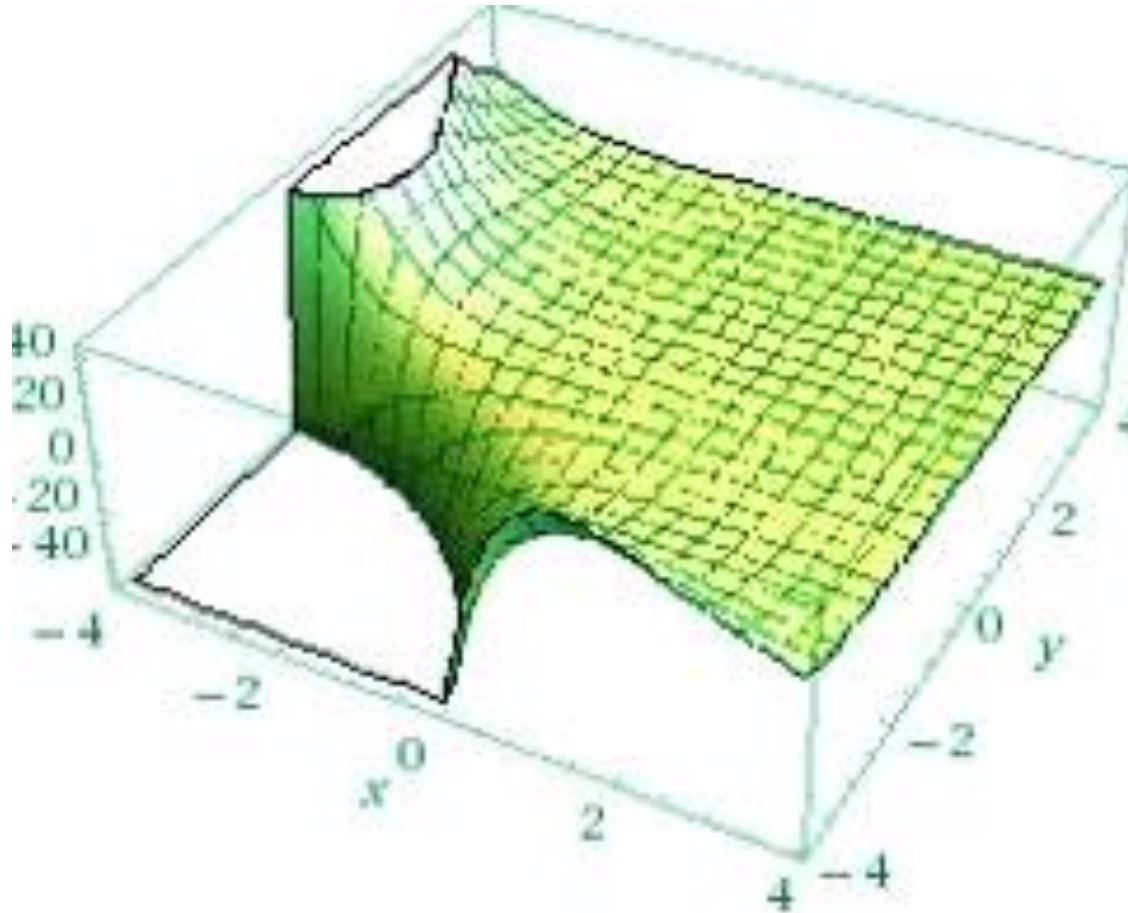
A fűtővíz hőmérsékletének követése

$$\frac{t_{vissza} - t_{lelő}}{t_{velő} - t_{lelő}} = 1 - e^{-(\xi + \eta)} \left[\xi + \frac{\xi^2}{2!} (1 + \eta) + \dots \right]$$

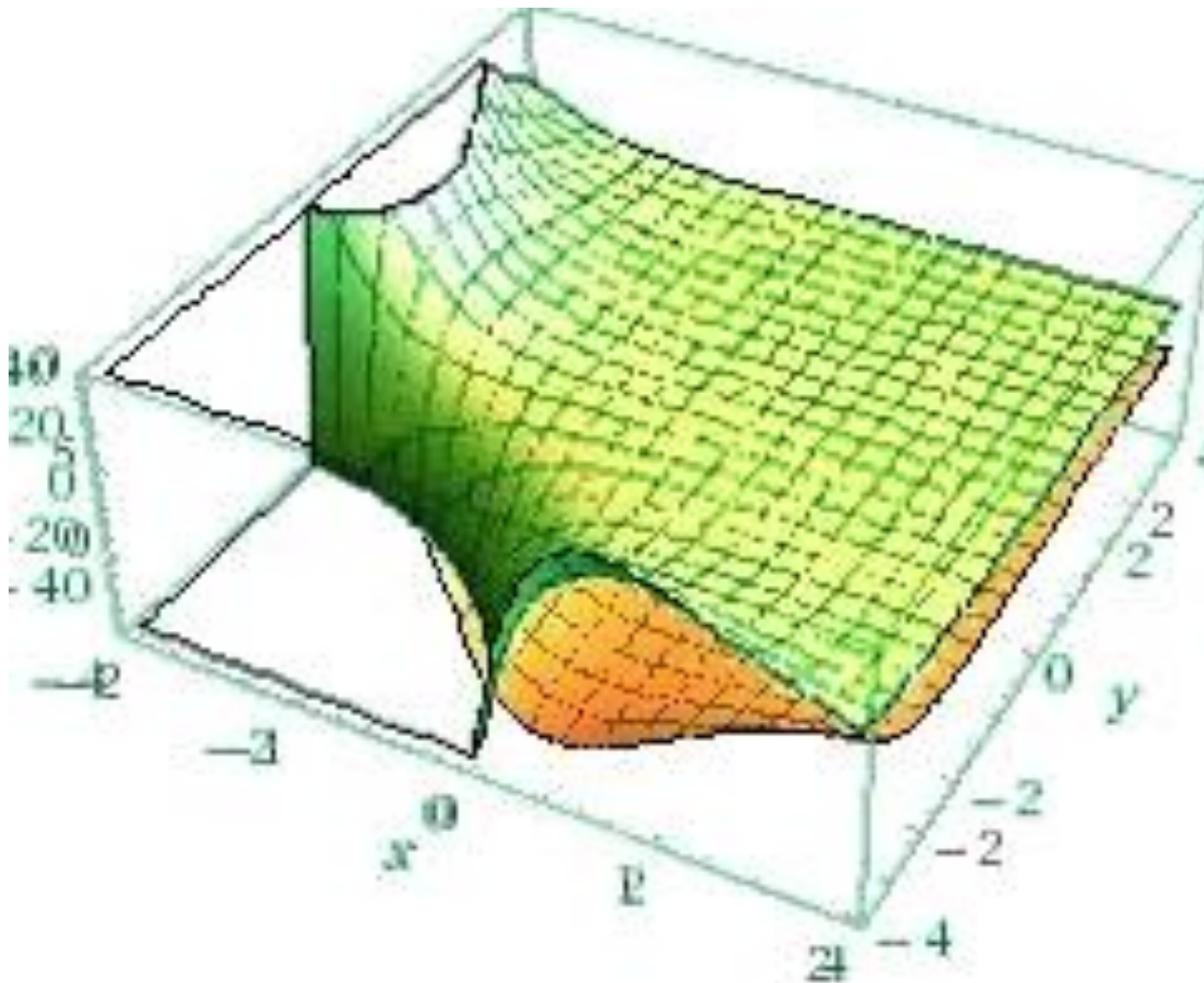


A levegő hőmérséklet lefutásának követése

$$\frac{t_{lvissza} - t_{lelő}}{t_{velő} - t_{lelő}} = 1 - e^{-(\xi + \eta)} [1 + \xi(1 + \eta) + \dots]$$



A fűtővíz és a levegő – közösen ábrázolva

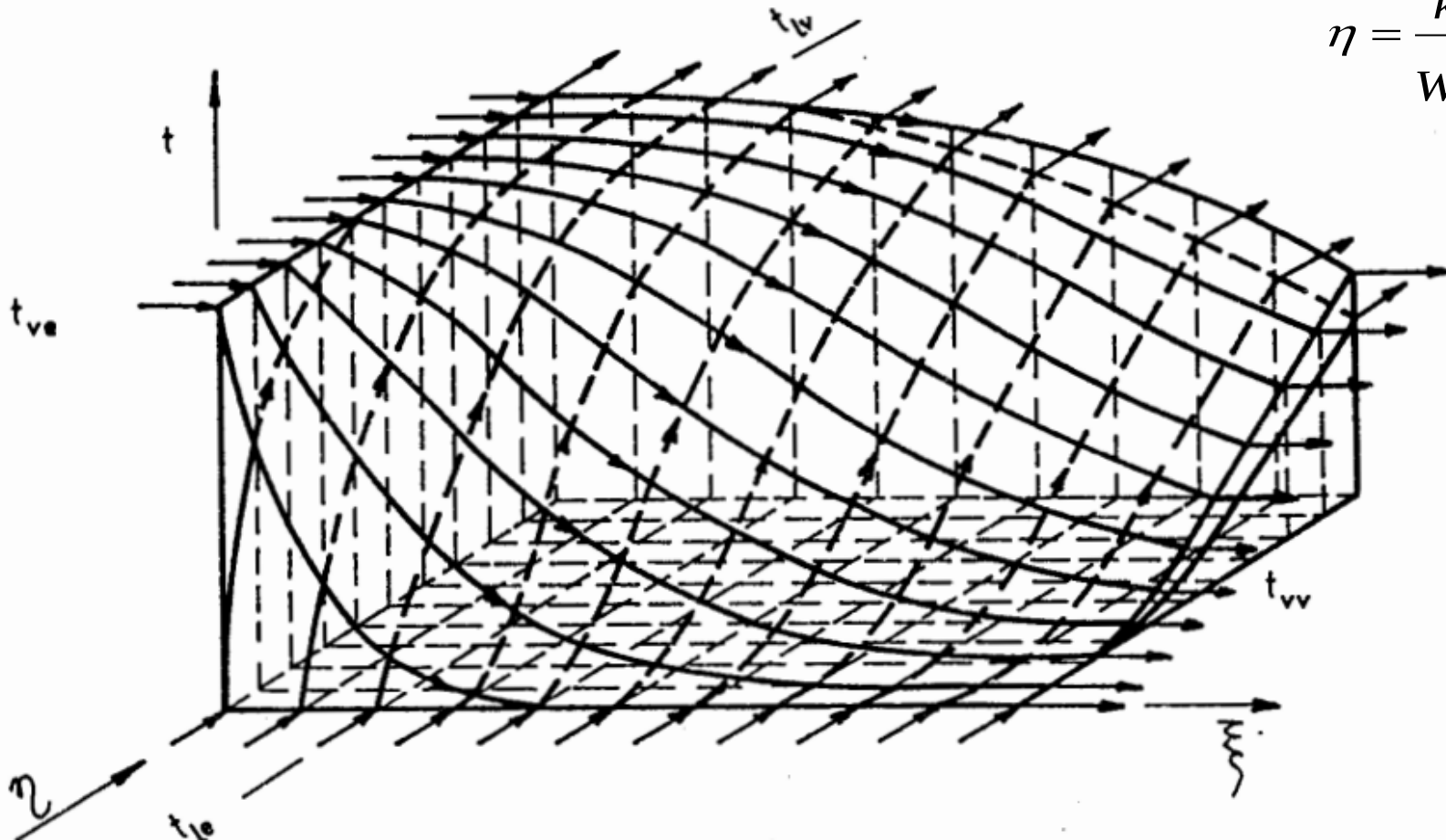


Hőmérséklet térbeli eloszlása keresztáramú hőcsere estén

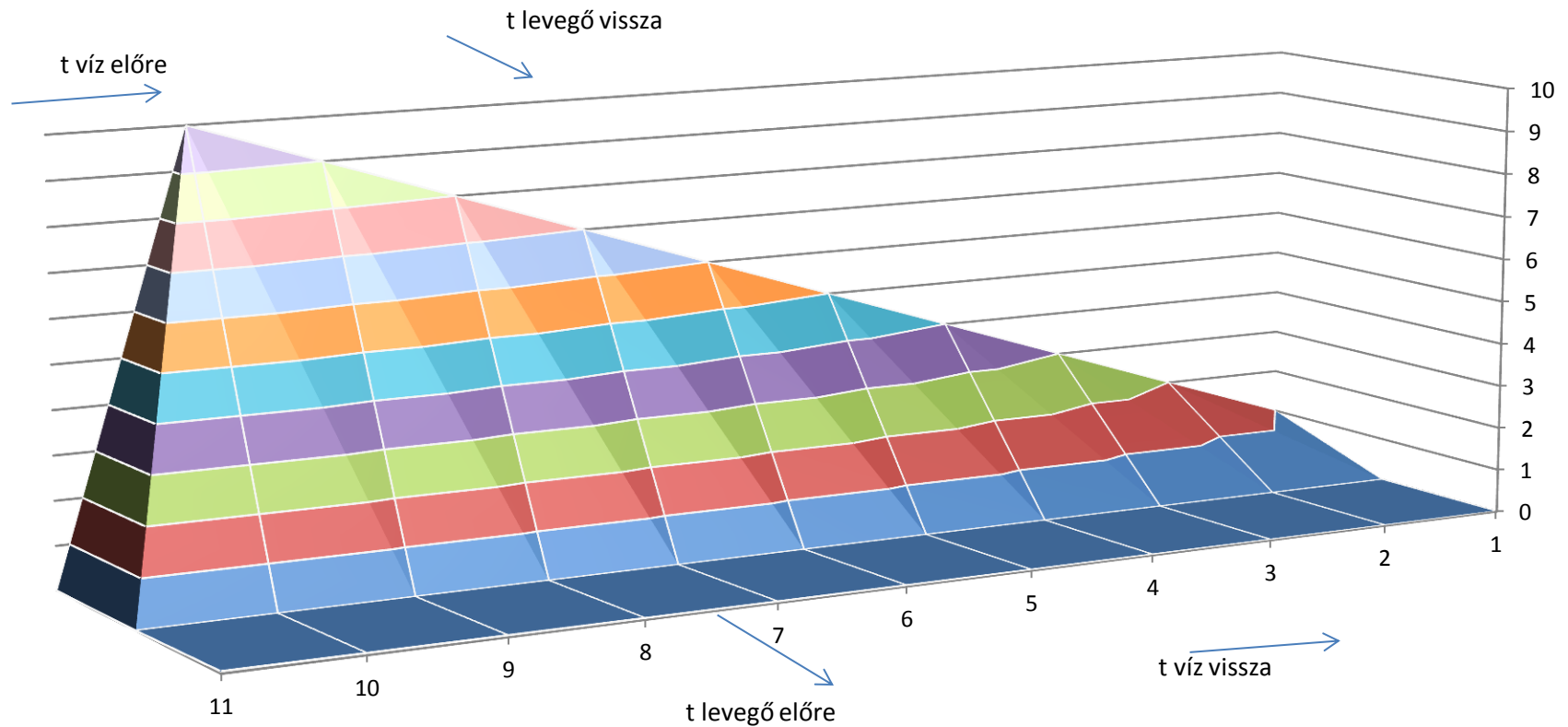
- A térbeli koordináta rendszer alapsíkjában a ξ és η tengelyek találhatók, míg a függőleges tengelyen a t hőmérséklet található.

$$\xi = \frac{k \cdot Y}{\dot{W}_{\text{víz}}} \cdot x$$

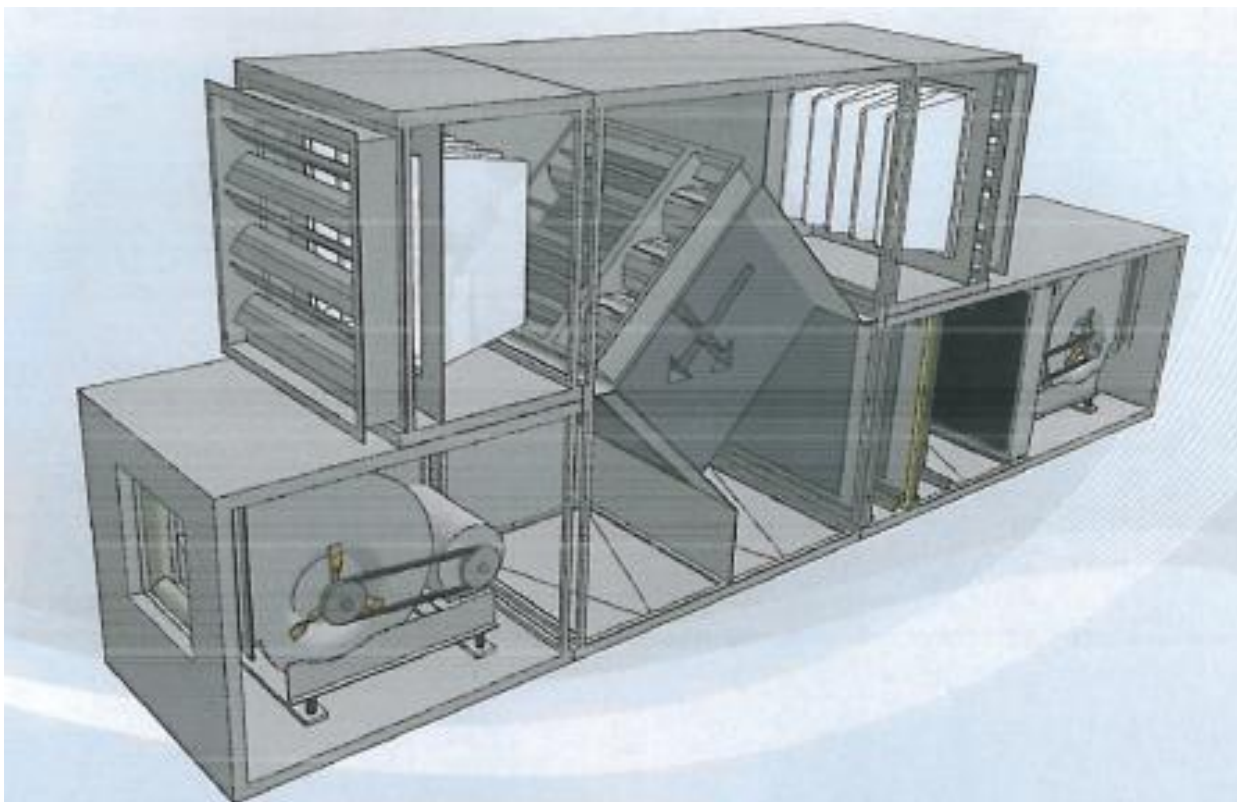
$$\eta = \frac{k \cdot X}{\dot{W}_{\text{levegő}}} \cdot y$$



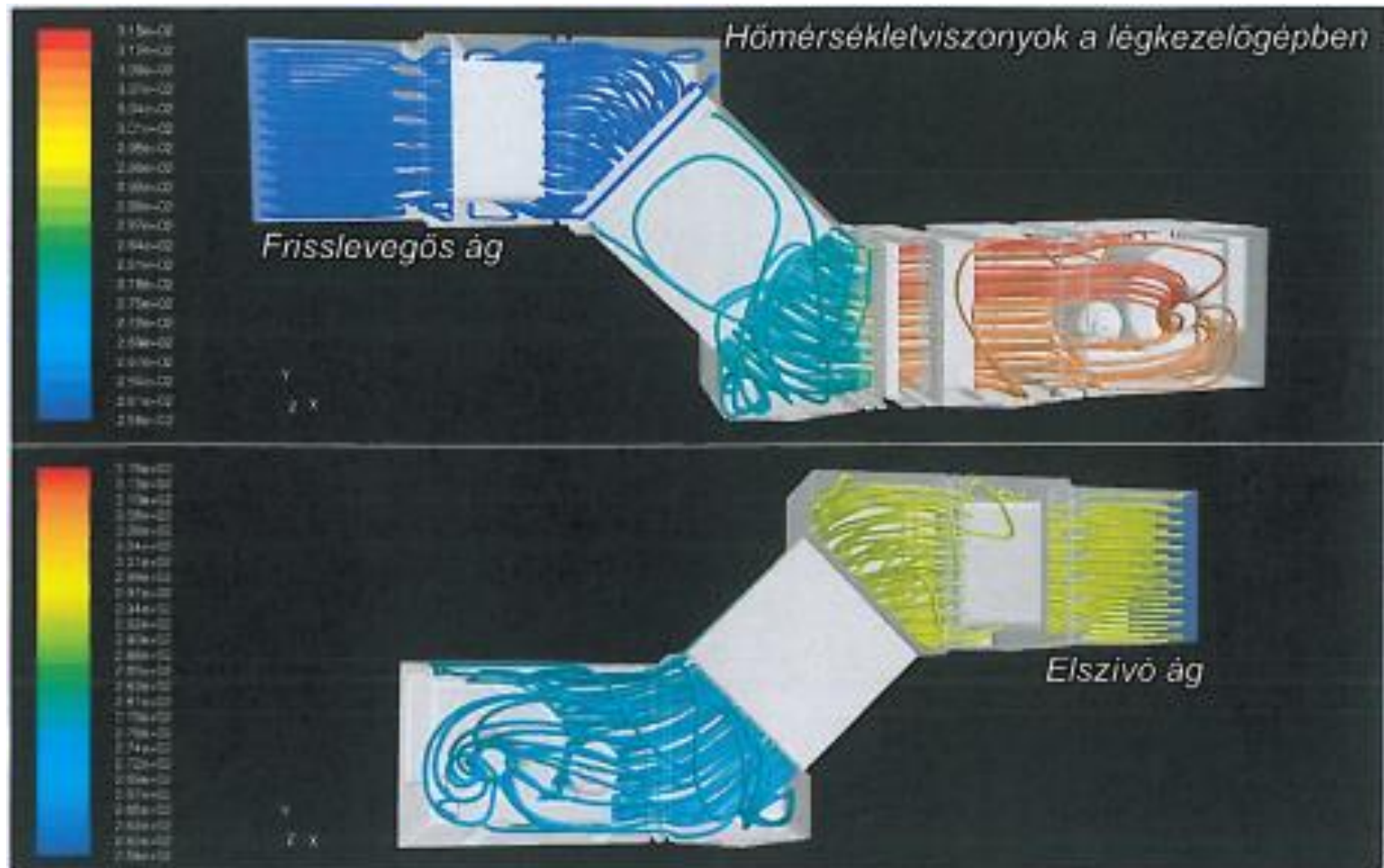
Hőmérséklet térbeli eloszlása keresztáramú hőcsere estén „Mérnökileg használhatóbb változat”



Keresztáramú hőcsere levegő-levegő esetén Hővisszanyerő hőcserélő

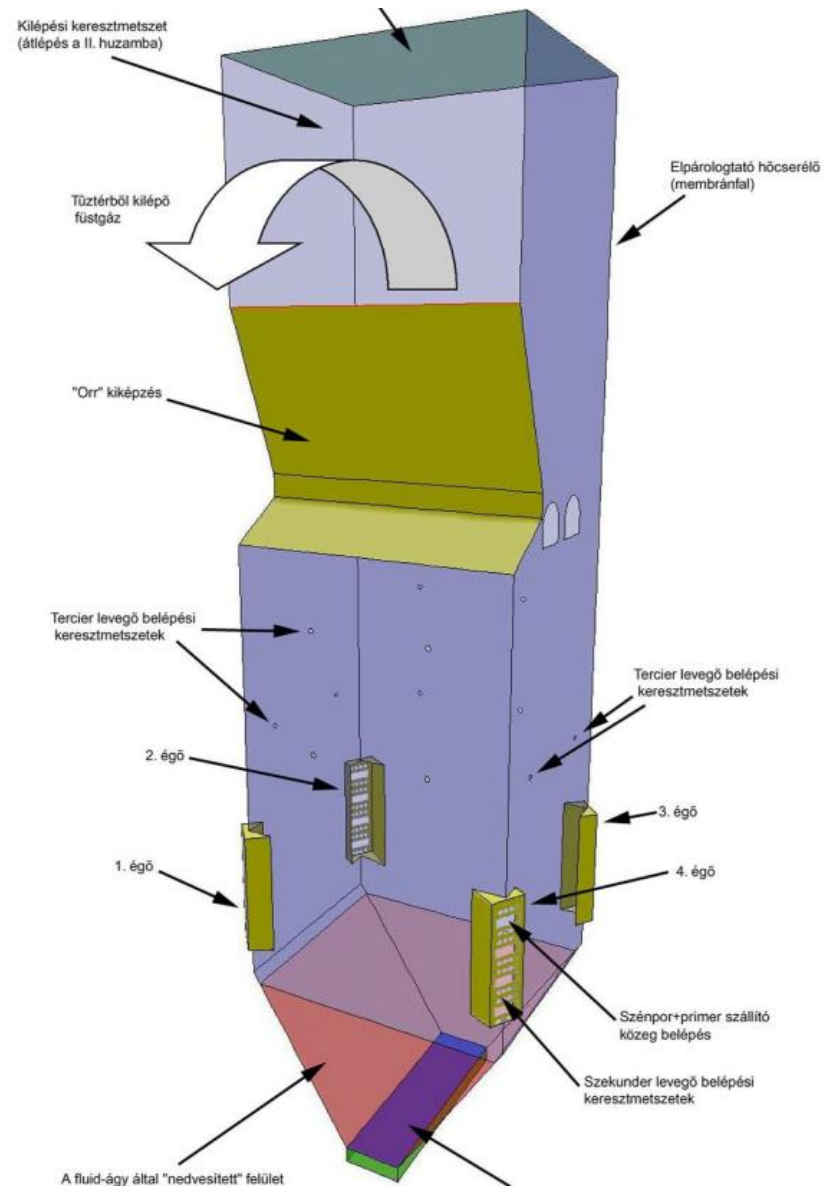


Hővisszanyerő berendezés



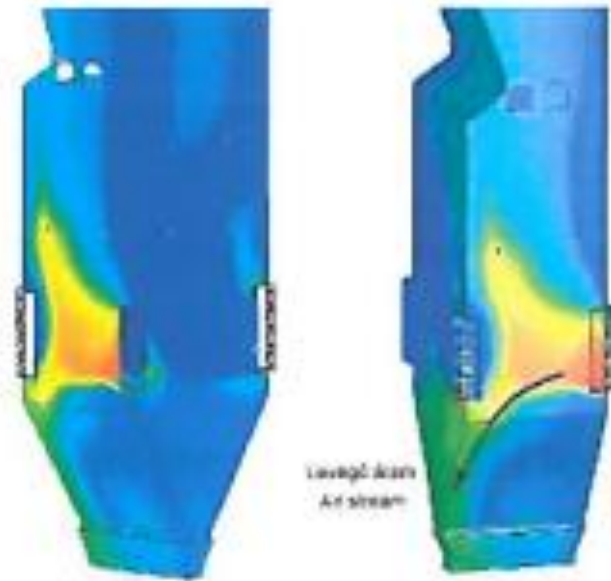
Tűztér modellezés

- A salak éghető tartalma megnőtt
- A kazán bizonyos szerkezeti elemein megnőtt a hőterhelés
- Túlhevülés következhet be
- A megoldás:
- Másodlagos égési zóna alakult ki a kazán alsó részében



A kazán, mint „égőtér”

- A szénpor égő szekunder levegőjének egy része az alsó régió irányába halad
- Ezzel biztosítja a másodlagos égési zóna kialakulásának egyik feltételét
- Az éghető anyagot pedig a spirális lángfelépülésből kihulló elégetlen szén szemcsék biztosítják
- Megoldás:
- A szénpor égő levegőmennyiségének csökkentése
- A szén szemcsék finomabbra történő őrlése – így nem hullik ki éghető anyag



Miért fontos?

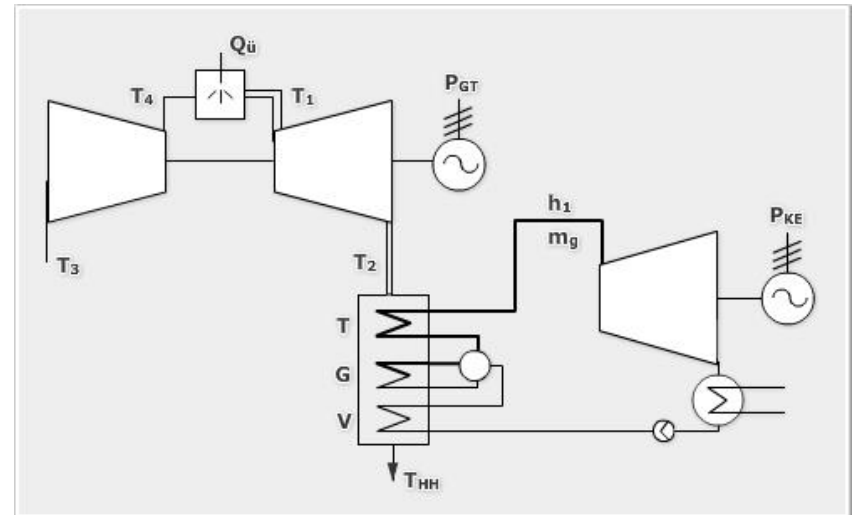
- A numerikus szimuláció segítségével a nemkívánatos szerkezeti anyag túlhevülését a másodlagos égési zóna megszüntetésével elkerülhetjük
- Nem kell módosítani a tűztér geometriáját
- Számos gazdasági előnye van:
 - Kevesebb a terven felüli karbantartásból adódó üzemállapot kiesés
 - Így nőtt az üzembiztonság
 - Meg lehetett spórolni a kazán geometriai állapotának módosítását
 - A hatásfok és környezetvédelmi paraméterek (káros anyag kibocsátás stb.) nem változtak



Fejlesztés a numerikus szimuláció segítségével

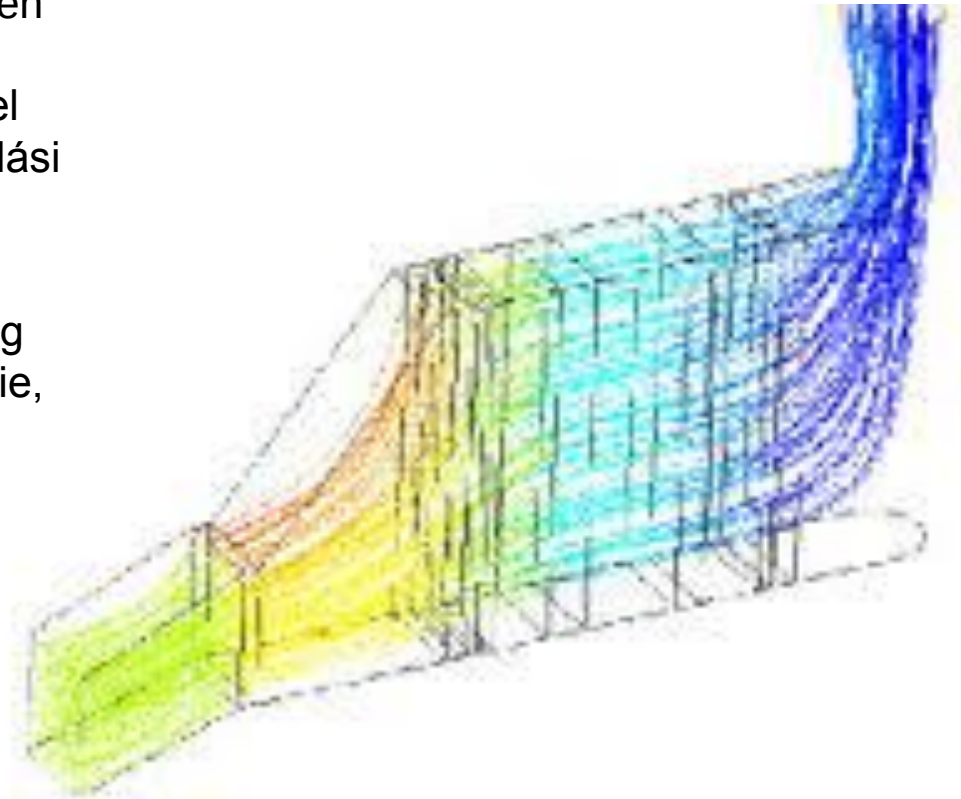
Hőhasznosító kazán

- Széles körben alkalmazzák a hőhasznosító kazánokat, amelyeknél gyakori megoldás a gázturbinából kilépő forró gáz hőmérsékletének megnövelése egy égősorral (rátüzelés)
- A tervezés során figyelembe kell venni, hogy a gázturbinából viszonylag kis keresztmetszeten nagy sebességgel kilépő gáz sebességét jelentősen kell csökkenteni a hőátadó felületekig



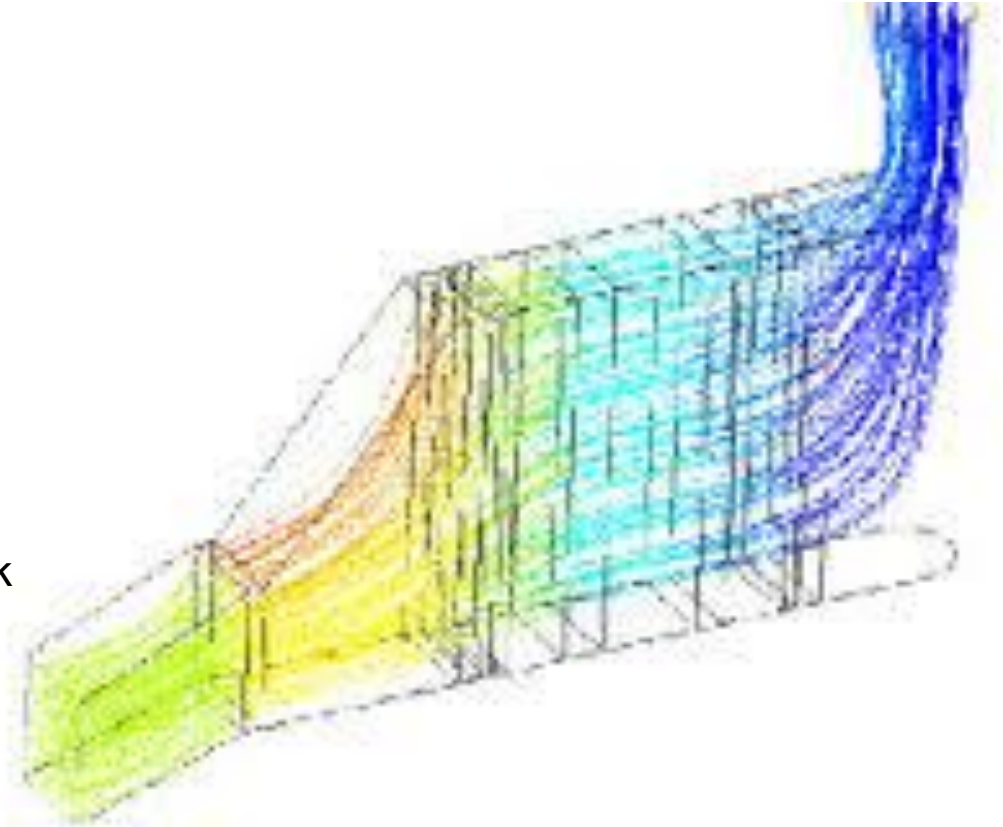
Hőhasznosító kazán

- Az áramlás jelentős mértékű lassítása - különösen meghatározott hosszon - igen nehéz feladat, ugyanis számolni kell a határréteg leválásával, kis sebességgel és visszaáramlással jellemezhető leválási buborék keletkezésével
- További követelmény, hogy a sebesség csökkenésnek egyenletesnek kell lennie, ellenkező esetben kedvezőtlen égési kondíciókkal és helyi túlmelegedések káros hatásával kell számolni

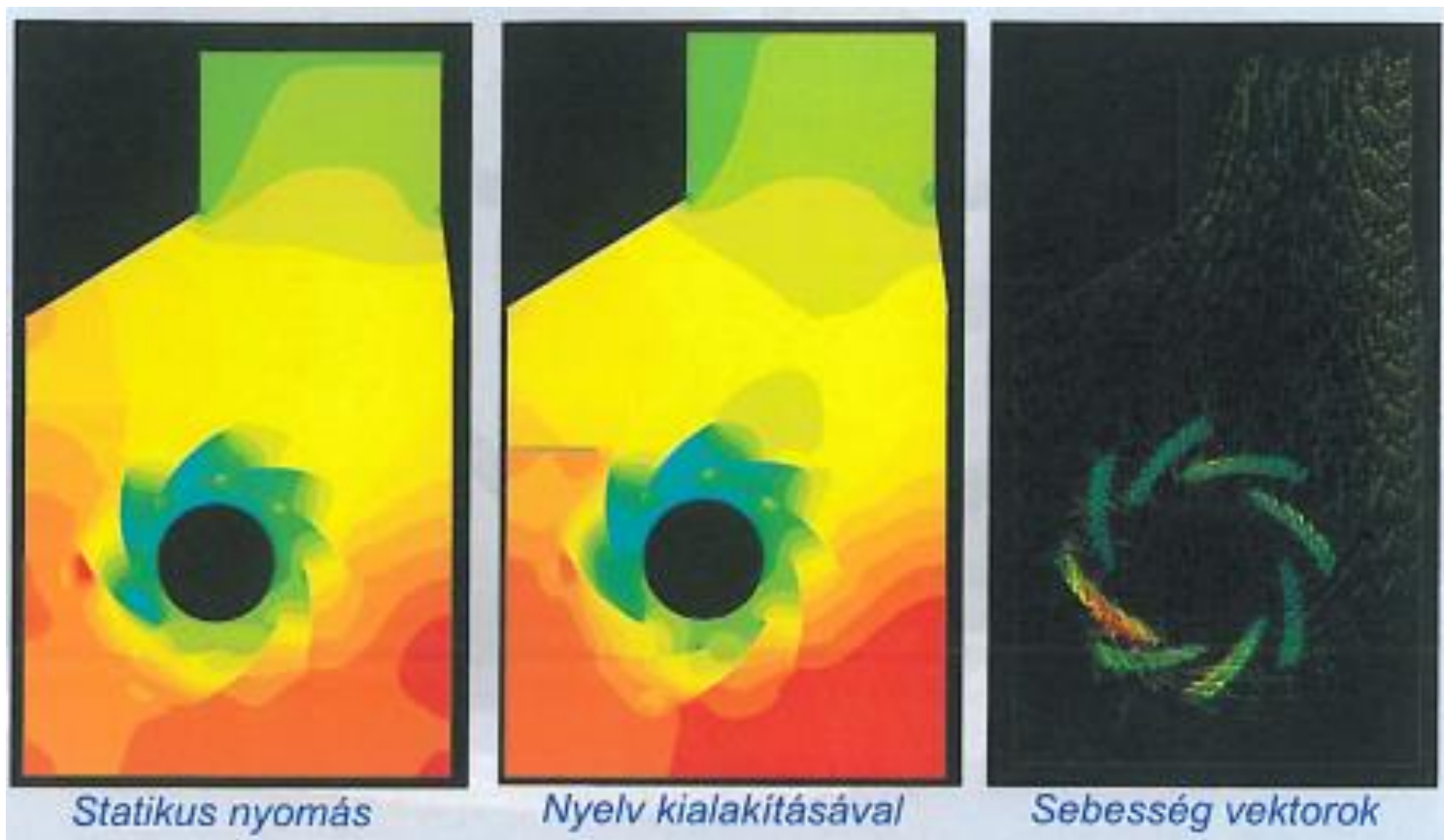


Hőhasznosító kazán

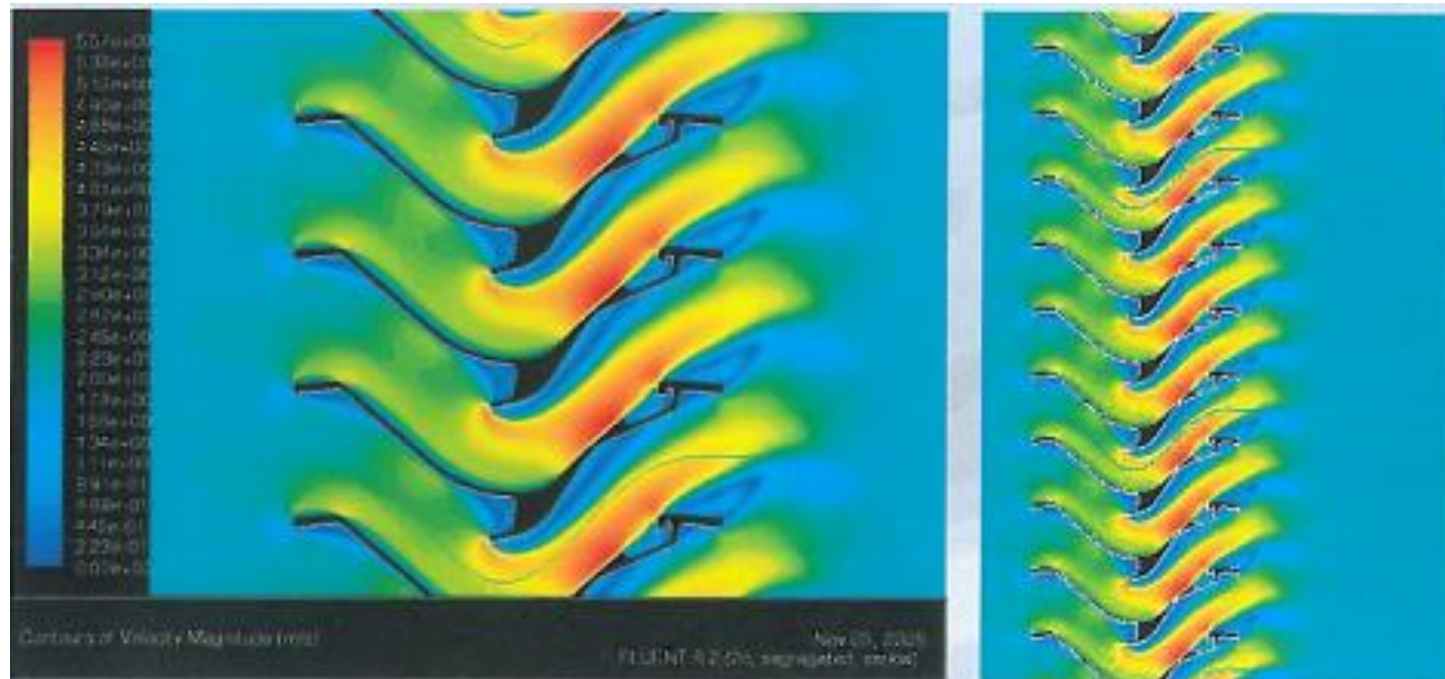
- A határréteg leválása a diffúzor felső részén egy leválási buborék kialakulását eredményezte
- E miatt a hőcserélőbe lépő közeg hőmérséklete felül kisebb lett
- A diffúzor kis módosításával a határréteg leválás megszüntethető, a hőmérséklet megoszlás egyenlőtlensége pedig csökkenthető
- További megoldásokkal - pl. terelőlapátok alkalmazásával - még egyenletesebb lett a sebesség- és hőmérséklet-megoszlás



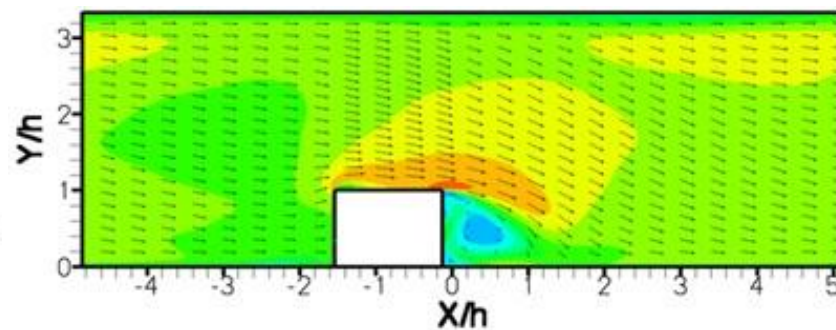
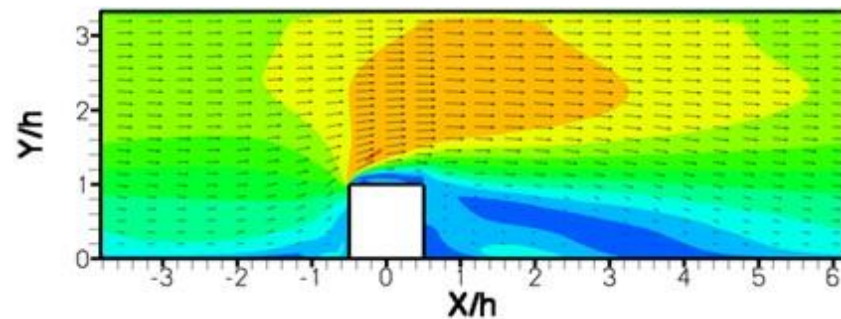
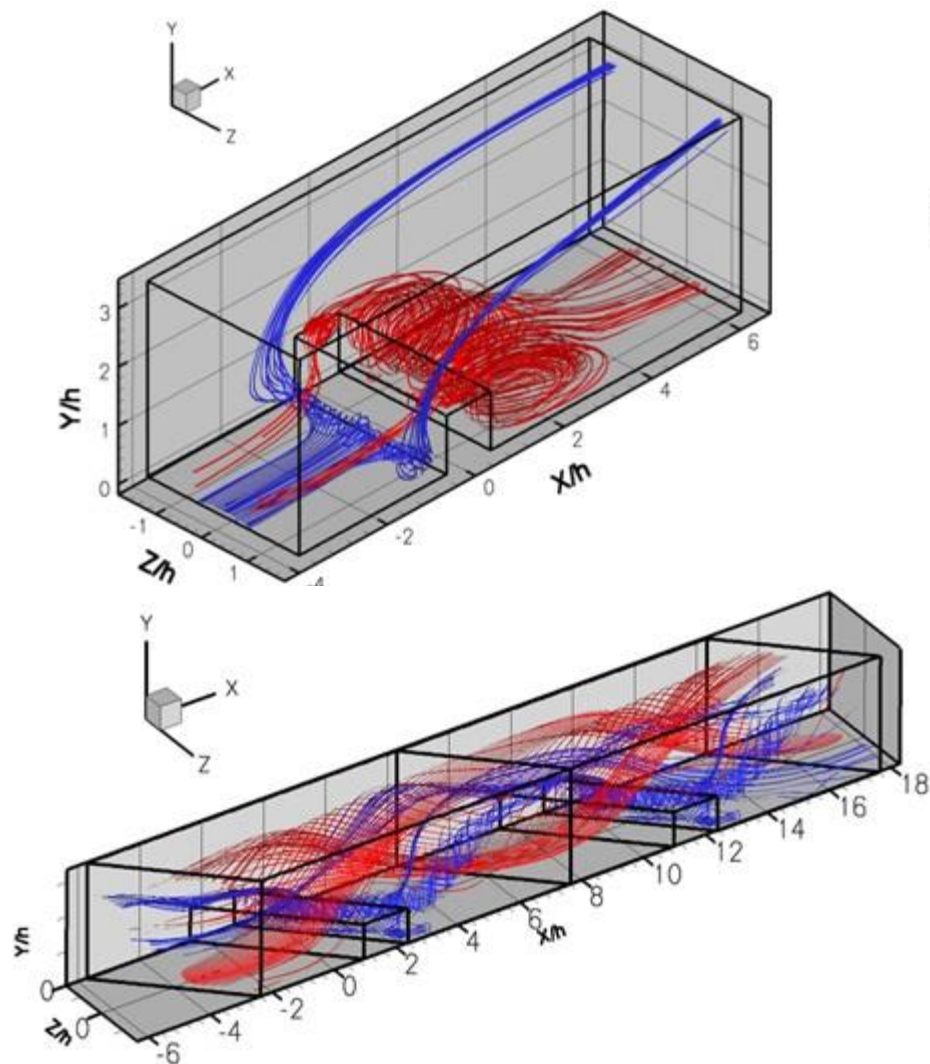
Áramlástechnikai fejlesztés



Áramlástechnikai fejlesztés

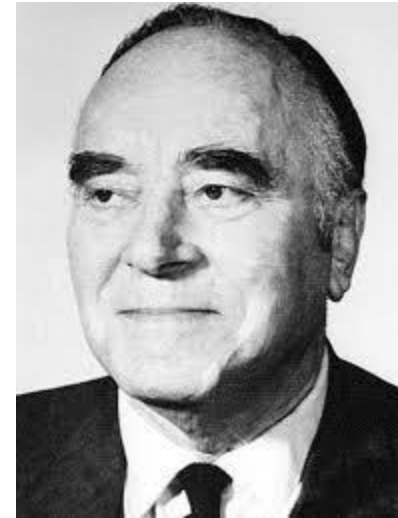


Csőáramlások



Hűtőtorony fejlesztése

- A Heller-rendszerű hűtőtoronyoknál az áramlás numerikus szimulálásával optimalizálták a hűtődeltákban kialakuló áramlási és hőátadási viszonyokat
- Ennek során meghatározták a hűtőoszlopon a sebességmegoszlás és hőátadás egyenletességének függését a geometriai paramétereiktől



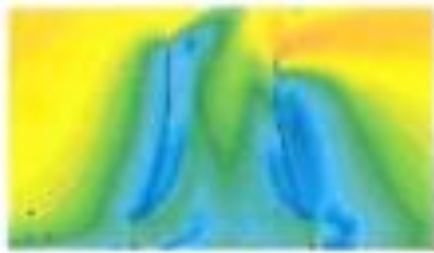
Heller László



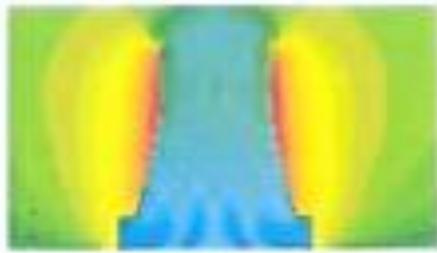
Forgó László

Hűtőtorony fejlesztése

- A szimulációs ábrán a hűtőtorony környezetében látható sebesség nagyságának eloszlása különböző szélesebességek esetén



$v_{\text{szél}} = 0,3 \text{ m/s}$

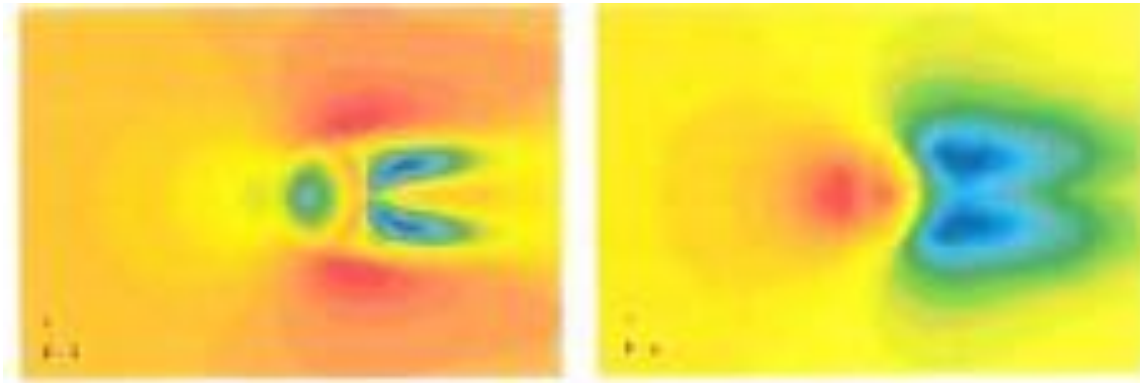


$v_{\text{szél}} = 6 \text{ m/s}$



Hűtőtorony kialakuló sebesség- és nyomás megoszlás

A sebesség- és a nyomásmegoszlást mutatja a hűtőtorony körül 150 m magasságban 6 m/s szélsősebességnél
Az áramlás numerikus szimulálással vizsgálták a szél hatását a hűtőtoronyon átáramló levegő mennyiségére

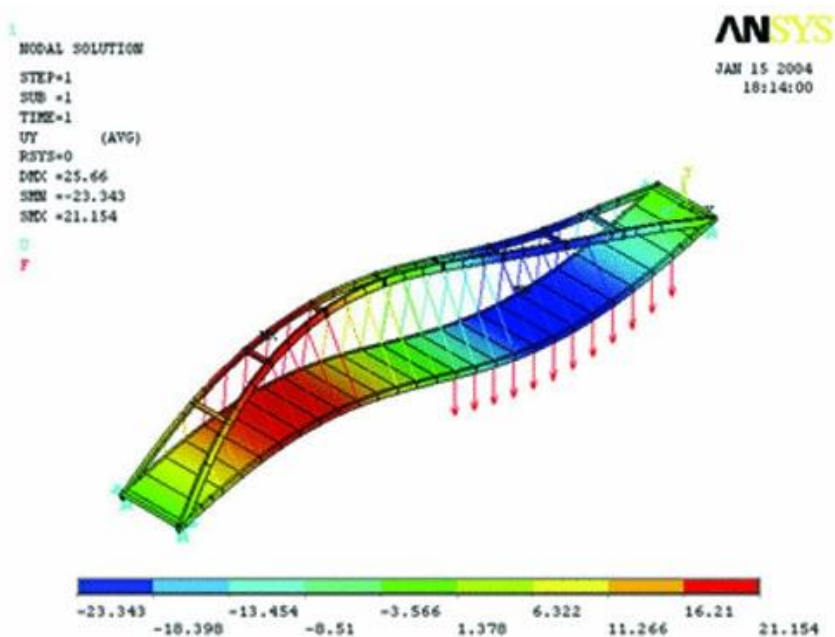
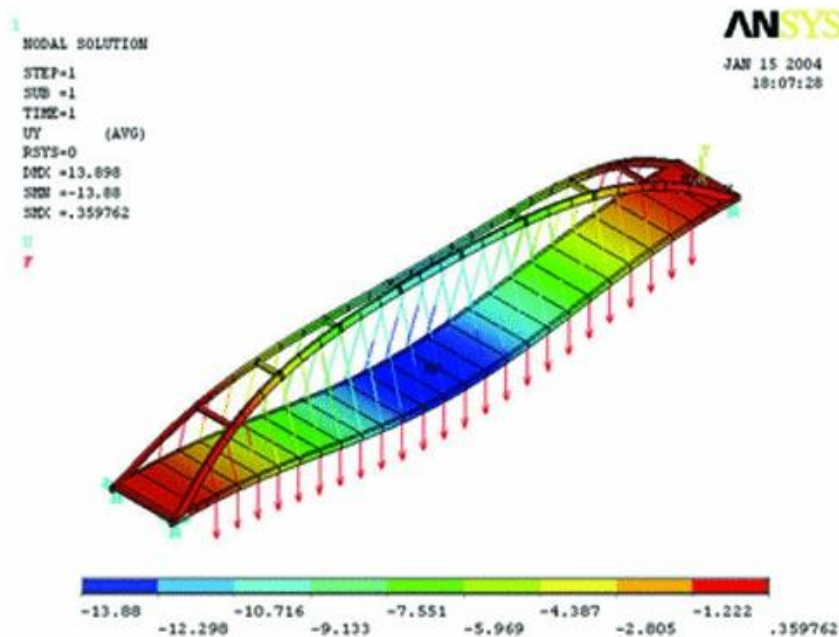


Rendszerszemlélet



Környezeti paraméterek hatása

- Az épített környezet megváltoztatja a külső hatásokat
- Például a szél hatása a híd vasszerkezetére



Egy egyszerű szimuláció felírása

- A numerikus szimuláció főleg áramlás és hőtechnikai feladatok megoldásánál használható
- Áramlásra már több példát bemutattam
- Nézzünk hőtechnikai esetet

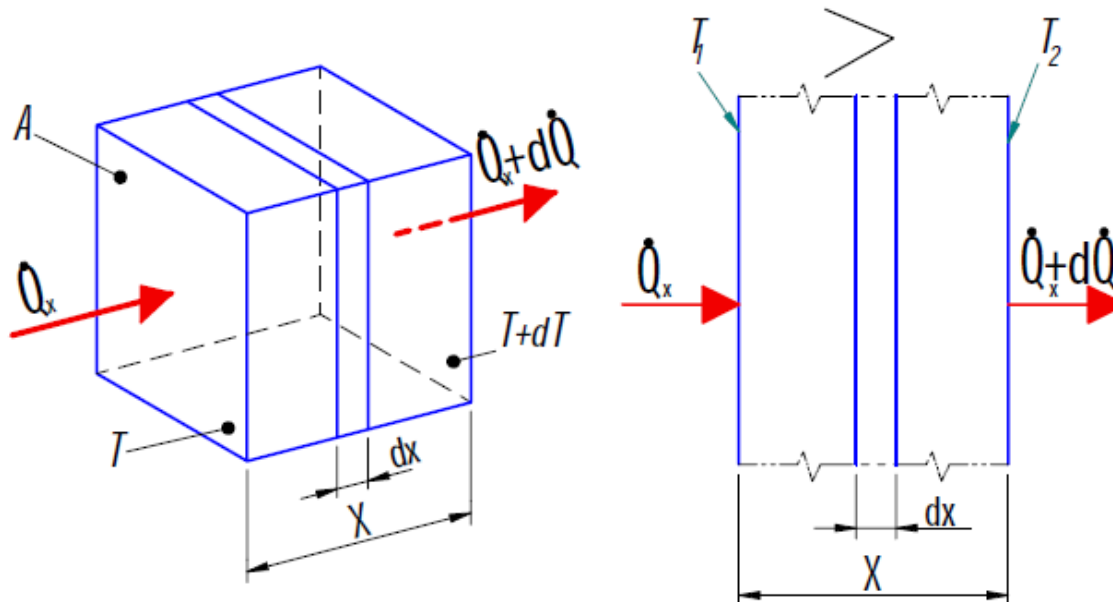


A kiinduló feladat

- A hővezetés differenciál egyenletének a megoldása
- A felületegységenként hőáram sűrűséget fejezi ki Fourier-törvénye
- III. a felülettel szorozva a hőáramot

$$\dot{q} = -\lambda \cdot \frac{dT}{dx} \left[\frac{W}{m^2 K} \right]$$

$$\dot{Q} = -\lambda \cdot A \cdot \frac{dT}{dx} \left[\frac{W}{K} \right]$$



A hőáram és a hőmérséklet kapcsolatát leíró Fourier egyenlet

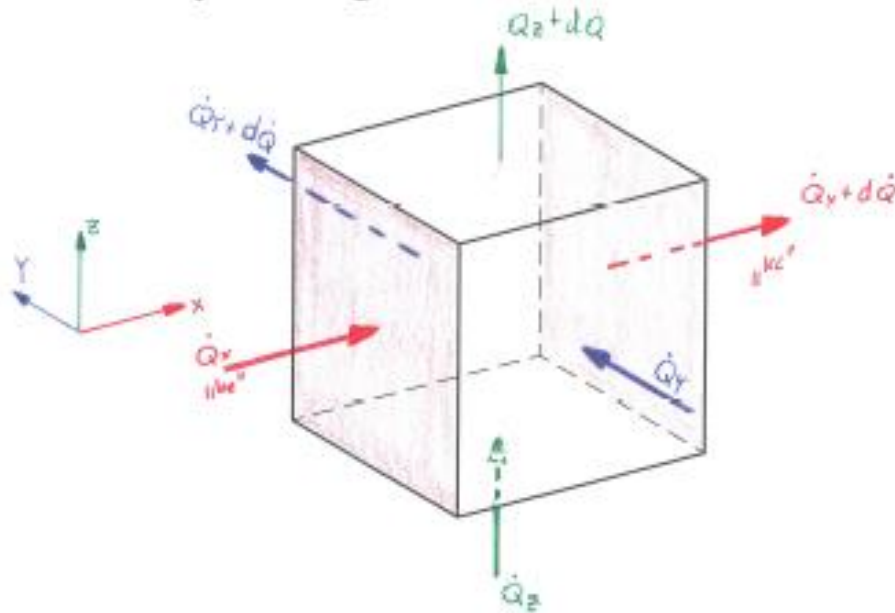
$$\dot{\underline{q}} = -\lambda \cdot \text{grad}T$$

- Sorrendben x, y, és z irányú megváltozását nézem a hőmérsékleteknek

$$\dot{\underline{q}}_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\dot{\underline{q}}_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}$$

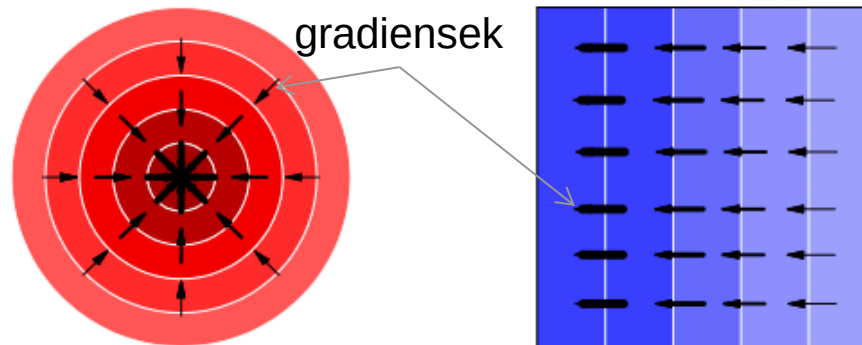
$$\dot{\underline{q}}_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}$$



A valóság közelítése

- A valóságot közelítve, vagyis a három dimenziós euklidészi térben a $T(x,y,z)$ skalármező gradiense derékszögű koordináta-rendszerben az alábbi egyenlettel írható fel:

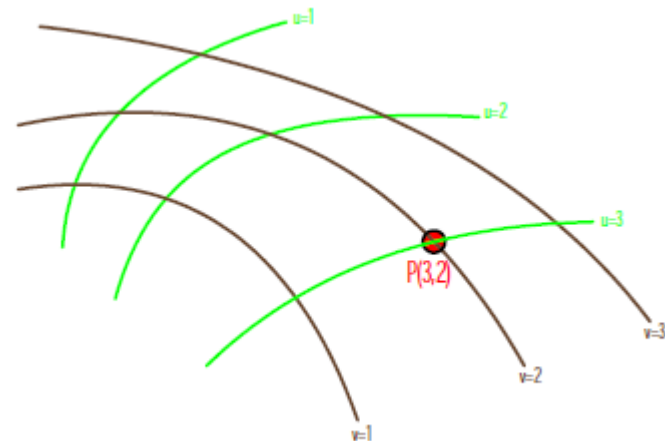
$$\text{grad}T = \nabla T = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{e}_z = \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{pmatrix}$$



Hővezetés differenciál egyenletének megoldása

- Probléma:
- Geometria, mely nem teljesen illeszkedik a Descartes féle egyenes vonalú koordinátákhoz
- Megoldás
- A hővezetés differenciálegyenletét vizsgálnunk kell görbe vonalú koordináta rendszerekben is
- A hővezetés általános differenciálegyenletének koordináta rendszerektől független alakja, állandó együtthatós formában megadható a következő alakban:

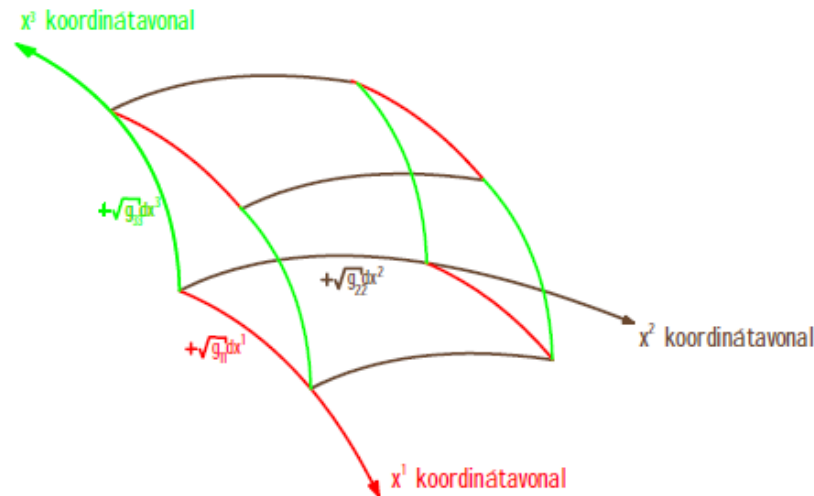
$$\frac{\partial T(r, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\dot{q}_v}{\rho \cdot c} + a \cdot \nabla^2 T(r, \tau)$$



A hővezetés differenciál egyenlete görbe vonalú koordináta rendszerben

- A görbe vonalú koordinátákkal való felírás két módon történhet:
- I.: Metrikus tenzorokkal:

$$\Delta t = \nabla \text{grad} t = \nabla \cdot \nabla t = \text{div grad} t$$



- II.: Laplace-operátornak (nabla négyzet) az összetett függvény deriválási szabályán (láncszabály) alapuló átírásával: $\frac{d}{dt} = f(t(r)) = \text{grad} f(t(r)) \cdot t'(r) = \nabla(t(r) \cdot t'(r))$

$$\text{grad}(t \cdot t'(x)) = \left(t \cdot \frac{\partial^2 t(x)}{\partial x^2} \right) e_x$$

A hővezetés differenciál egyenlete

- Koordináta rendszertől független alak:

$$\frac{\partial T(r, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\dot{q}_v}{\rho \cdot c} + a \cdot \nabla^2 T(r, \tau)$$

- 1 dimenzió: végtelen sík fal esete
- 2 dimenzió: henger koordináta rendsze
- 3 dimenzió: gömbi koordináta rendszer

- Skalár-pont függvény Laplace-operátor

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\dot{q}_v}{\rho \cdot c} + a \cdot \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right]$$

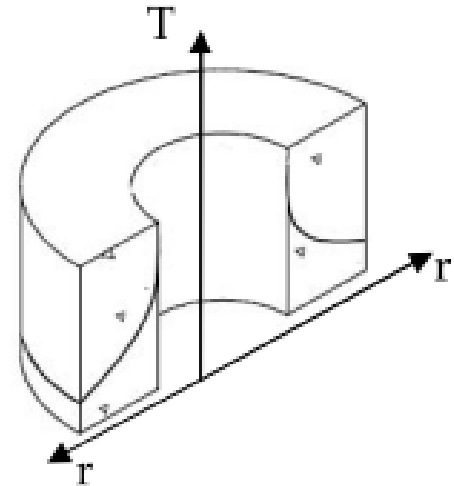
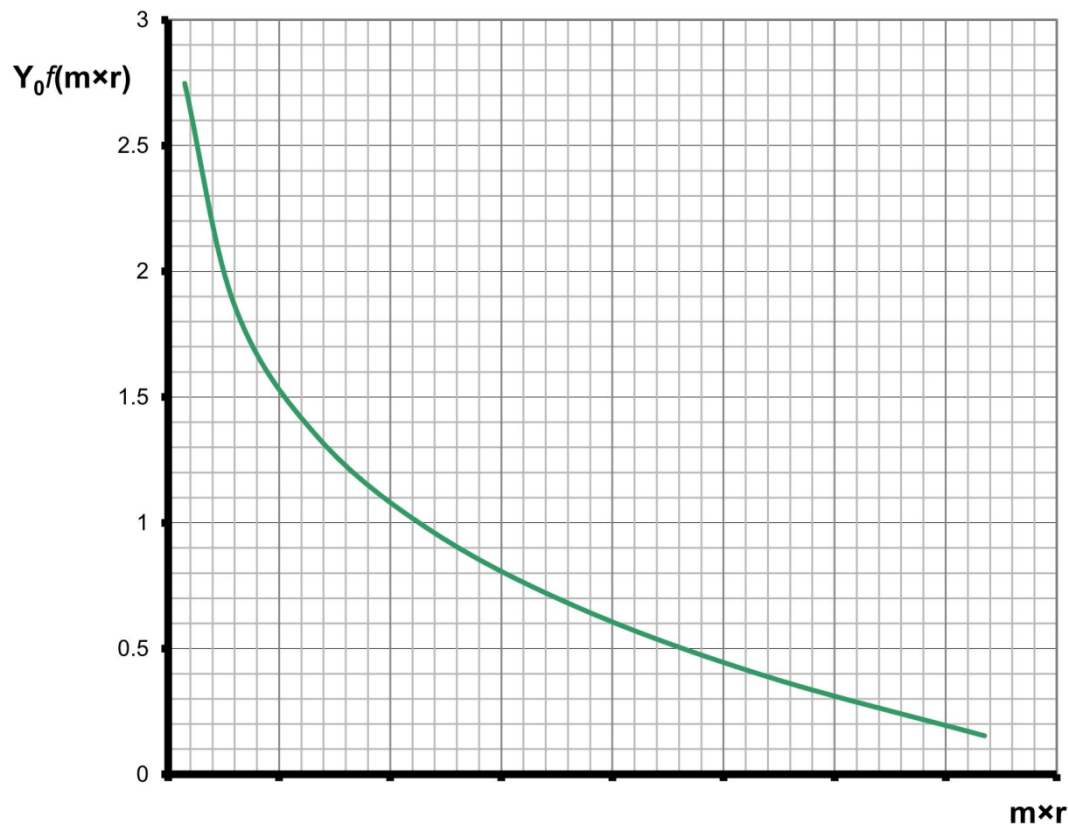
koordináta rendszertől független alakja	$\frac{\partial T(r, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\dot{q}_v}{\rho \cdot c} + a \cdot \nabla^2 T(r, \tau)$
Descartes koordinátákkal	$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\dot{q}_v}{\rho \cdot c} + a \cdot \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right]$
henger koordinátákkal	$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\dot{q}_v}{\rho \cdot c} + a \cdot \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right]$
gömbi koordinátákkal	$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\dot{q}_v}{\rho \cdot c} + a \cdot \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial T}{\partial \vartheta} \right) \right]$
általános ellipszoidális koordinátákkal	$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\dot{q}_v}{\rho \cdot c} + a \cdot \left[\frac{1}{(x-\mu)(x-\nu)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{\mu(x-\mu)} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{1}{(\mu-\lambda)(\mu-\nu)} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\sqrt{\mu(\mu-\lambda)} \frac{\partial T}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\sqrt{\nu(\nu-\mu)} \frac{\partial T}{\partial \nu} \right) \right]$
nyújtott szferoidikus koordinátákkal	$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\dot{q}_v}{\rho \cdot c} + a \cdot \left[\frac{1}{a^2(\sigma^2 - r^2)} \left(\frac{\partial}{\partial \sigma} \left[(\sigma^2 - 1) \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 - r^2) \frac{\partial T}{\partial r} \right] \right) + \frac{\sigma^2 - r^2}{(\sigma^2 - 1)(1 - r^2)} \frac{\partial^2 T}{\partial \sigma^2} \right]$
lapos szferoidikus koordinátákkal	$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\dot{q}_v}{\rho \cdot c} + a \cdot \left[\frac{1}{a^2(\sigma^2 + r^2)} \left(\frac{\partial}{\partial \sigma} \left[(1 + \sigma^2) \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 - r^2) \frac{\partial T}{\partial r} \right] \right) + \frac{\sigma^2 + r^2}{(1 + \sigma^2)(1 - r^2)} \frac{\partial^2 T}{\partial \sigma^2} \right]$
kúpkoordinátákkal	$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\dot{q}_v}{\rho \cdot c} + a \cdot \left[\frac{d}{a^2(\nu^2 - \mu^2)} \left(\frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{d}{a(\nu^2 - \mu^2)} \frac{\partial T}{\partial \mu} \right) + \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{d}{a(\mu^2 - \nu^2)} \frac{\partial T}{\partial \nu} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial d} \left(\frac{d}{a} \frac{\partial T}{\partial d} \right) \right]$
parabolikus koordinátákkal	$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\dot{q}_v}{\rho \cdot c} + a \cdot \left[\frac{1}{(\sigma^2 + r^2)} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\sigma \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right) + \left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{r^2} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial \sigma^2} \right]$
parabolikus hengerkoordinátákkal	$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\dot{q}_v}{\rho \cdot c} + a \cdot \left[\frac{1}{(\sigma^2 + r^2)} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right) \right]$
elliptikus hengerkoordinátákkal	$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\dot{q}_v}{\rho \cdot c} + a \cdot \left[\frac{1}{(\sigma^2(\sigma^2 - r^2))} \left(\frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\sqrt{\sigma^2 - 1} \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right] + \sqrt{1 - r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\sqrt{1 - r^2} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial \sigma^2} \right]$
bipoláris koordinátákkal	$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\dot{q}_v}{\rho \cdot c} + a \cdot \left[\frac{1}{a^2} (ch \tau - \cos \sigma)^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \sigma^2} \right) \right]$
bipoláris gömbi koordinátákkal	$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\dot{q}_v}{\rho \cdot c} + a \cdot \left[\frac{1}{a^2 \sin^2 \sigma} \left(\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\sin \sigma}{\sin \sigma} \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right) + \sin \sigma \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{\sin \sigma} \frac{\partial T}{\partial \tau} \right) \right) + \frac{1}{\sin^2 \sigma} \frac{\partial^2 T}{\partial \sigma^2} \right]$

A kapott eredmény: a két alapmegoldás

$$T = C \cdot e^{-a \cdot m^2 \cdot \tau} \cdot J_0(m \cdot r)$$

$$T = C \cdot e^{-a \cdot m^2 \cdot \tau} \cdot Y_0(m \cdot r)$$

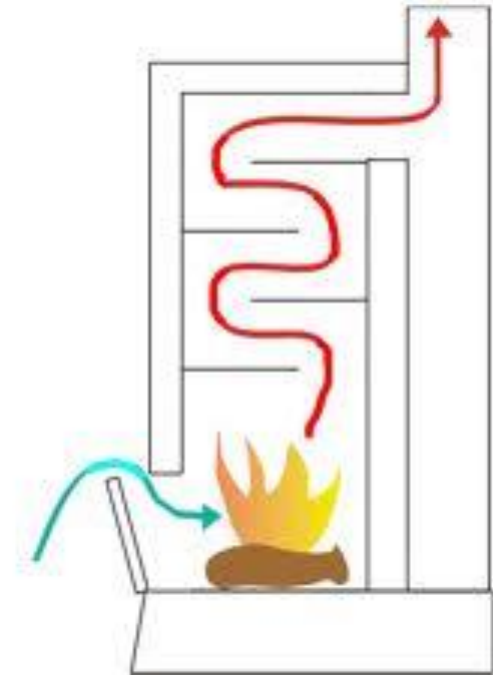
- Az egyenletek megoldásánál:
- J_0 elsőfajú, nulladrendű
- Y_0 a másodfajú, nulladrendű Bessel-függvényt jelenti



Elemző vizsgálat henger koordináta rendszerben

- Egy cserépkályha „esete”
- Az elemzésem során a hővezetés henger koordinátákkal felírt egyenletének csak r helykoordinátától függő alakjával végeztem vizsgálatot, melynek alakja:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\dot{q}_v}{\rho \cdot c} + a \cdot \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right]$$

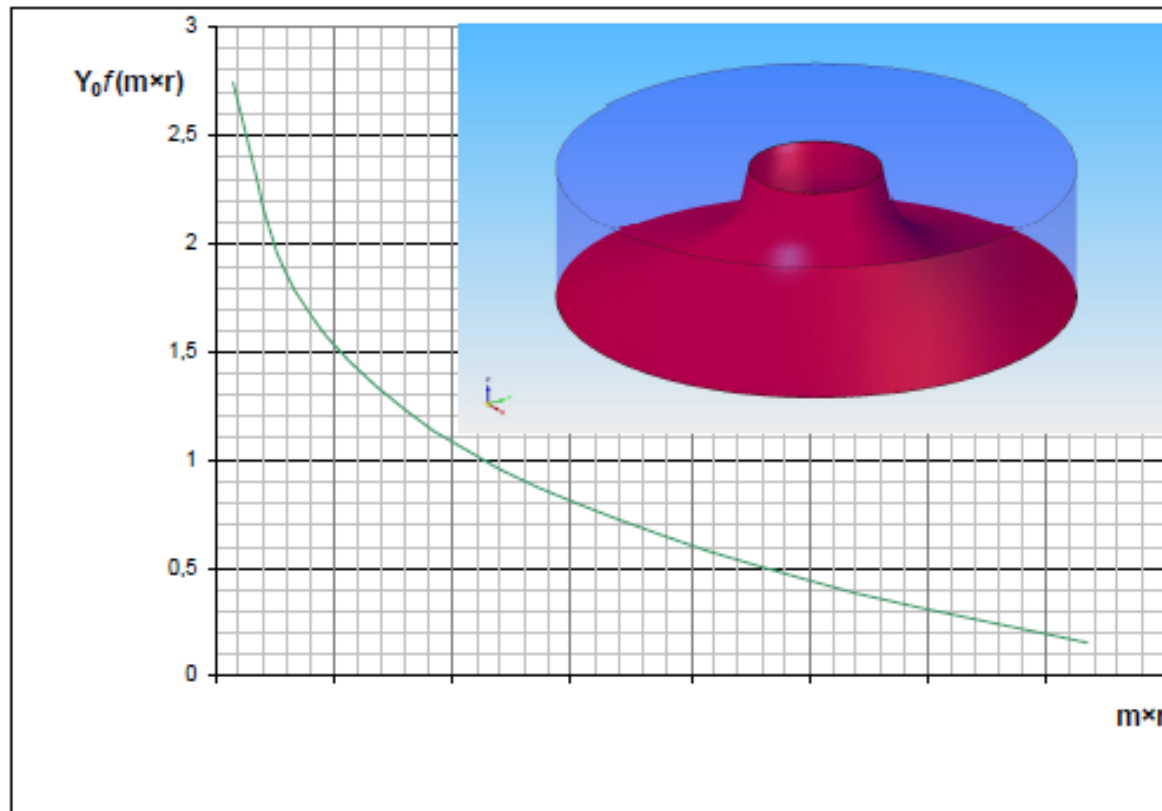


A két alapmegoldás

$$T = C \cdot e^{-a \cdot m^2 \cdot \tau} \cdot J_0(m \cdot r)$$

$$T = C \cdot e^{-a \cdot m^2 \cdot \tau} \cdot Y_0(m \cdot r)$$

- Az egyenletek megoldásánál:
- J_0 elsőfajú, nulladrendű
- Y_0 a másodfajú, nulladrendű Bessel-függvényt jelenti

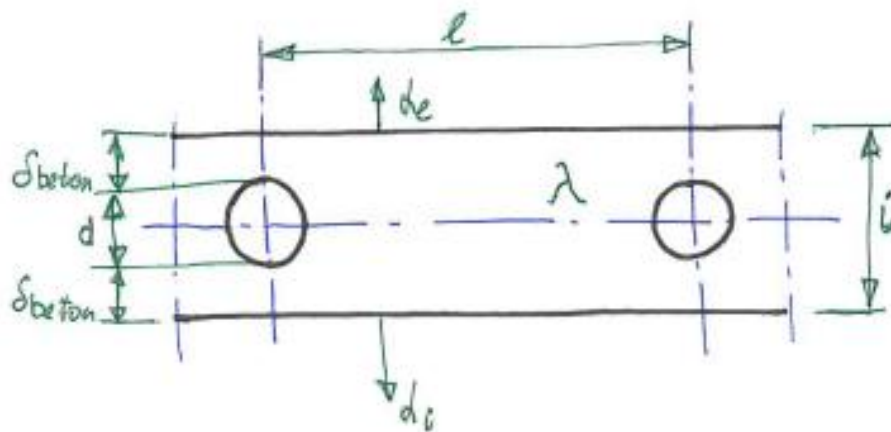


Betonrétegbe ágyazott csövek esetei – padlófűtés, betonmagtemperálás

- A sáv túlhőmérsékletének meghatározása – „használatos megoldás”:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\vartheta_w \cdot \tanh(x) \cdot (m \cdot l)}{\left(1 + \frac{\alpha \cdot \delta}{l}\right) \cdot (m \cdot l)} \right) \longrightarrow \vartheta = \frac{2 \cdot \vartheta_w \cdot m \cdot (0,5 - x)}{l \cdot m \cdot \left(\frac{\alpha_i \cdot \delta_{beton}}{\lambda_{beton}} + 1 \right)}$$

- Az alkalmazott jelölések jelentései:



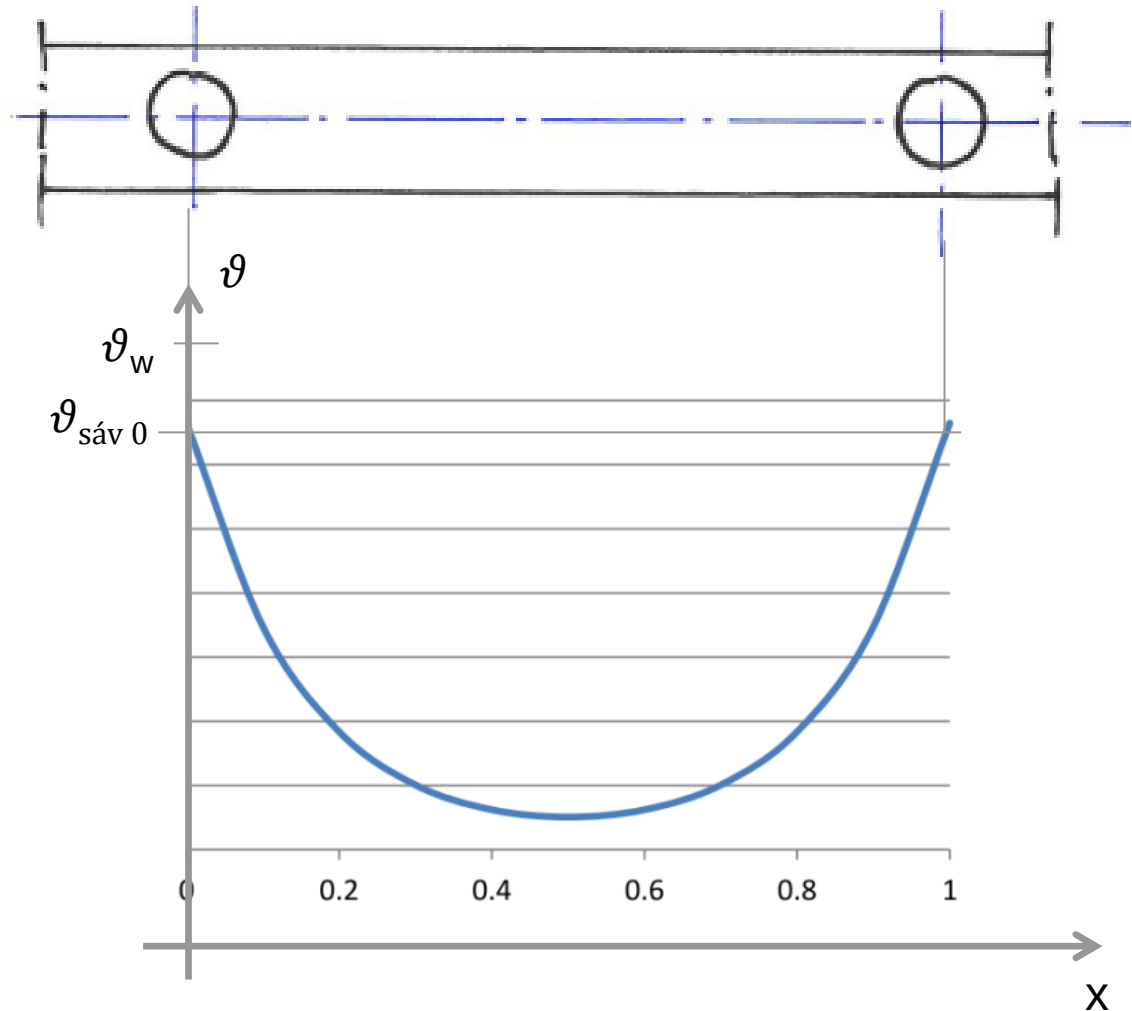
Mit vártunk? Mit kaptunk?

- Vártunk: hőmérséklet eloszlást

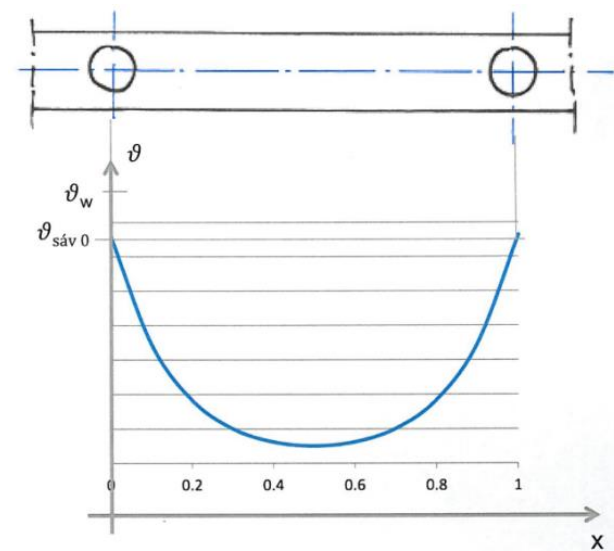
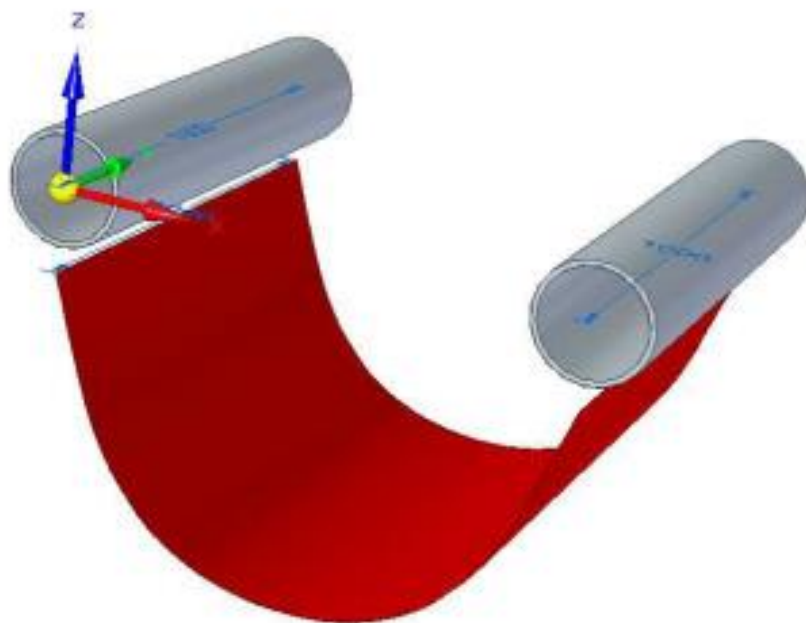
$$\vartheta = \frac{2 \cdot \vartheta_w \cdot m \cdot (0,5 - x)}{l \cdot m \cdot \left(\frac{\alpha_i \cdot \delta_{beton}}{\lambda_{beton}} + 1 \right)}$$

- m – paraméter

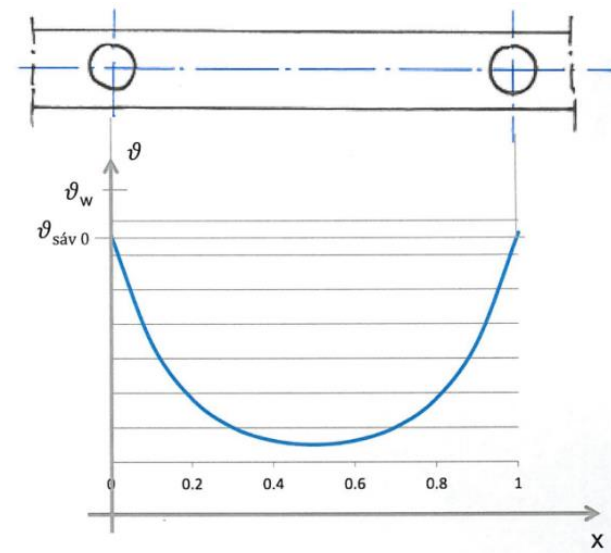
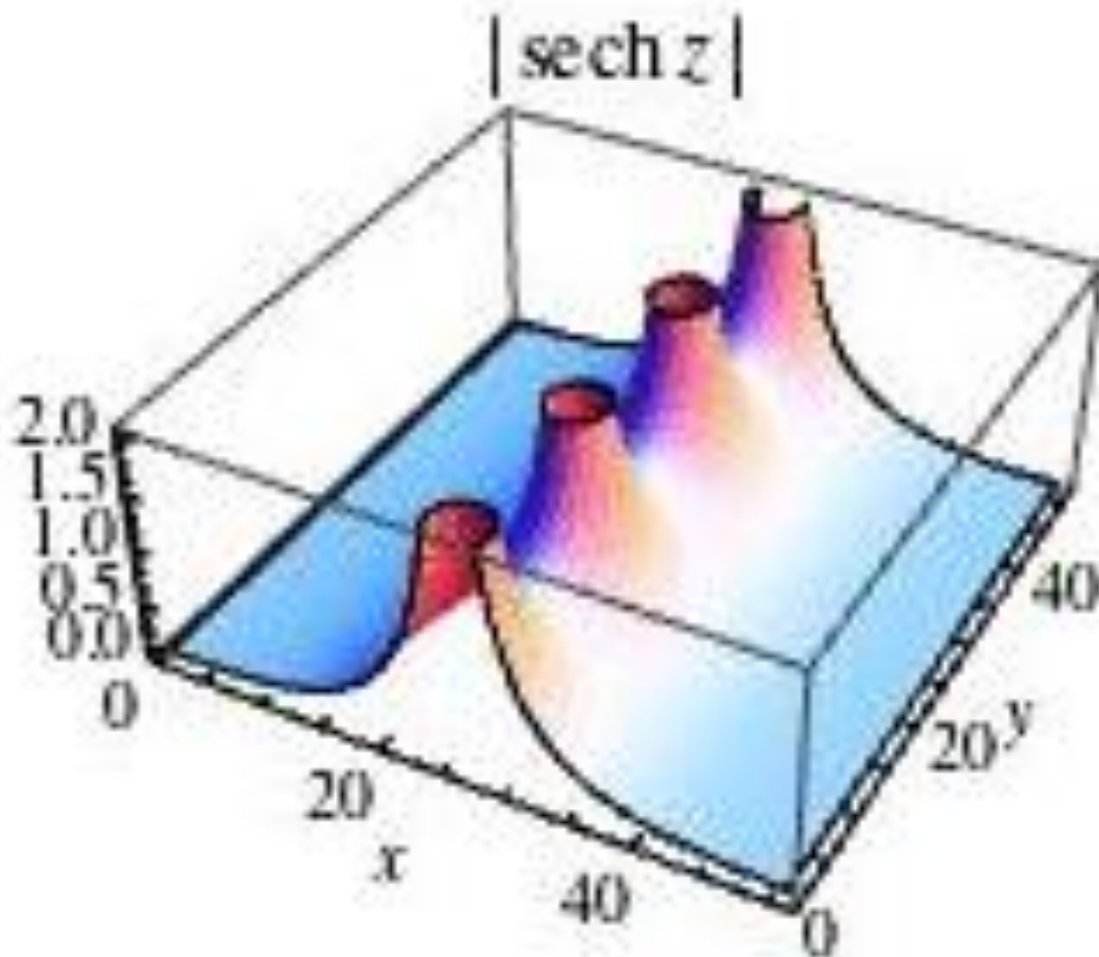
$$m = \sqrt{\frac{\alpha_i + \alpha_e}{i \cdot \lambda_{beton}}}$$



Hőmérséklet eloszlási képek



Hőmérséklet eloszlási képek



Numerikus szimuláció – összefoglaló gondolatok

- A bemutatott példákkal és feladatokon keresztül remélem sikerült rámutatnom nemcsak a szimulációs eljárások fontosságára, hanem a tervezés fontosságára
- A „PAPÍRMUNKA” idő, ám a végeredményben jobb, biztosabb és használható eredményt fogunk kapni
- Lehetőségünk nyílik a részletes folyamatok megismerésére és megértésére
- És ez által a fenntartható fejlődésnek megfelelő energetikai létesítményeket tervezni és üzemeltetni, mely a jövő energetikusainak egyik legfontosabb szempontja kell legyen!!

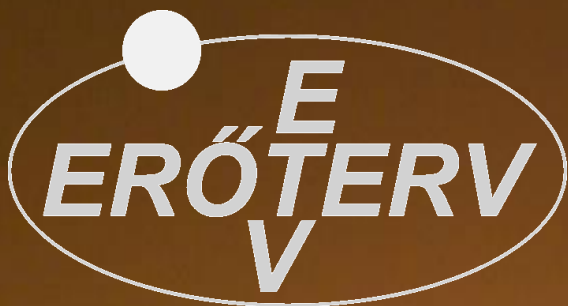


Numerikus szimuláció – összefoglaló gondolatok

- Ez úton is gratulálok az ESZK tagjainak, a munkájukhoz
- Bármilyen ilyen jellegű tevékenység előbbre viszi az ENERGETIKÁT
- <http://ecobuilding.hu/>
- „A fizikának többnek kell lennie képletek halmazánál, amelyek megjósolják, mit fogunk megfigyelni egy adott kísérletben – arról kell beszámolnia, milyen a világ valójában.”

Lee Smolin





PÖYRY ERŐTERV ZRt.
1094 Budapest Angyal u. 1-3
Hungary
www.poyry.hu
eroterv@poyry.com
szabolcs.molnar@poyry.com
06-20 / 43 98 351

KÖSZÖNÖM SZÉPEN
MEGTISZTELŐ FIGYELMÜKET!

Kérdések!

